Construire des mathématiques : un rêve inaccessible ?

Thierry Dias

INTRODUCTION

L'objet mathématique trône dans une vitrine protégée du monde sensible. Il règne dans une splendeur conceptuelle et abstraite. Il est beau et Idéal selon Platon, mais il est intouchable et inaccessible, car intrinsèquement immatériel. Dans cette perspective de la Grèce ancienne qui perdure inexorablement dans notre rapport aux mathématiques, toute tentative de figuration serait une dénaturation. Pourtant, les représentations des objets mathématiques sont possibles. Elles sont même nécessaires à qui exerce une tâche d'apprenant dans cette discipline. En effet, construire des connaissances mathématiques, c'est à la fois se confronter à une culture de ses représentations possibles dans des environnements propices, mais aussi accepter une certaine perméabilité à la transmission des codes qui permettent l'organisation de ces connaissances. Parce que connaître, c'est aussi apprendre : l'apprenti ne doit pas ménager sa peine, même si le projet semble difficile et inaccessible, tant les concepts mathématiques peuvent paraître éloignés de son entendement.

Depuis plusieurs années nous développons des situations d'apprentissages mathématiques consistant à proposer aux apprenants (enfants, élèves, adolescents, enseignants en formation, adultes) des tâches de constructions en géométrie dans l'espace (Dias, 2014). Il s'agit pour eux d'intervenir dans un environnement matériel adapté (Anghileri, 2006), les conduisant à bâtir des objets dont les dimensions peuvent être importantes. Ces constructions, qui ne sont que des compromis avec la réalité (Gonseth, 1936), sont cependant reconnues comme des créations humaines à la fois ancrées culturellement et riches de valeurs esthétiques.

Ce que nous explorons avec ces créations géométriques est la possibilité de construction d'un nouveau point de vue sur ces objets sensibles pour permettre un accès progressif aux concepts mathématiques (Vergnaud, 2011) qui leur sont sous-jacents. Les situations d'apprentissage qui nous servent de terrain d'investigation sont l'occasion d'exhiber les connaissances en actes des participants parfois à leur plus grande surprise tant ils sont persuadés de leur déficience « dans le monde anxiogène des mathématiques », comme ils le désignent souvent.

DE L'EXISTENCE DES OBJETS MATHÉMATIQUES

Discuter de l'existence des objets mathématiques relève *a priori* d'un travail de réflexion épistémologique du fait de l'appartenance des notions mathématiques à l'ensemble plus élargi des connaissances scientifiques. Dans la suite de notre propos, nous utiliserons la dénomination « objet » pour définir ce qui est placé devant le sujet, ce que l'on vise, soit pour l'atteindre soit pour le connaître. Un double enjeu de connaissance donc : celui du monde sensible dans lequel on accède aux choses et celui des concepts par lequel on accède aux savoirs. Comme personne ne doute vraiment de l'existence des objets mathématiques, ce que nous interrogeons ici est leur mode de représentation à notre perception et à notre entendement, c'est-à-dire leur rapport à notre réalité.

Dans l'Encyclopédie Universalis, Jean Hamburger[19] propose une définition du concept de réalité que nous ferons nôtre dans le propos de cet article sur le plan sémantique :

> « *Pour Platon, les nombres et la géométrie étaient l'essence des choses : or, qu'y a-t-il de plus subjectif que les nombres et la géométrie ? Ils ne sont pas le monde ; ils sont ce que l'homme apporte au monde. Ils sont une sorte de "rêve efficace"* […] *Même illusoire, le "rêve efficace", dont notre raison et la science nous font présent, est de grande beauté. La prise de conscience de son artifice accroît l'aura de mystère dont nous avons le sentiment confus* » (Hamburger)[20].

19. Repéré à http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/concept-de-realite/
20. *Ibid.*

La force des objets mathématiques est de pénétrer dans notre réalité avec deux vecteurs principaux : ils sont à la fois efficaces pour résoudre des problèmes de notre monde, mais également incroyablement esthétiques[21]. Si leur existence est organisée dans un système théorique nécessaire, leur réalité ne sert *in fine* que nos actions dédiées à leur représentation.

> « *La réalité telle que nous la percevons est une construction autonome de notre esprit dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible* » (Gonseth, 1936. In Bkouche, 2008 : p. 34).

Mais le réel doit-il être évoqué comme une perception sensible individuelle (et donc subjective), ou plutôt dans une perspective sociale avec une visée plus objective ? Si la réalité peut être présentée comme un concept philosophique platonicien, la notion de réel est, quant à elle, plus propice à déterminer ce qui relève de l'existence. Est réel ce qui est. Là encore une dialectique s'impose lorsqu'on utilise le prisme des objets mathématiques pour traiter de cette affirmation d'existence. Le réel peut être perçu de manière sensible grâce à une attention portée sur des signes. Dans ce cas, le contrôle s'exerce par les sens et la connaissance dans des rapports essentiellement de proximité. Le réel partagé (Lelong, 2004) est une autre acception tout aussi légitime, mais dans une perspective plus sociale. Est réel ce qui est partagé dans une intention toujours contrôlée par la connaissance, mais cette fois aussi par des pairs. Les rapports de proximité font alors place à des rapports logiques.

Une solution de rencontre effective entre sujets et objets existe : il s'agit de construire puis d'utiliser un nouveau point de vue sur les mathématiques en s'appuyant sur leur dimension expérimentale (Dias, 2008). Cette démarche résolument didactique consiste à bâtir des situations d'apprentissage dans lesquelles les allers et retours entre les objets réels et formels sont permis par des confrontations, des vérifications et des argumentations. On testera ainsi par l'action l'adéquation ou la non-adéquation des objets de la réalité aux propositions théoriques. On permettra des formulations langagières susceptibles de confirmer ou d'infirmer des hypothèses, et, *in fine*, on sera à même d'organiser des débats pour valider, prouver et convaincre de ses résultats. C'est ainsi que les objets mathématiques sont traités comme de véritables concepts scientifiques sur lesquels on expérimente dans un projet de conception. L'objet mathématique s'inscrit alors dans une culture scientifique, car ses représentations relèvent d'actes véritablement créatifs (production nouvelle et adaptée).

21. Nous utilisons la notion d'esthétique au sens du XVIIIe siècle : la science du beau.

ACCÉDER À L'IDÉAL : MIMESIS, REPRÉSENTATION

Selon les principes de la Grèce platonicienne, on peut parler d'une irrémédiable imperfection du monde sensible tant il se révèle incapable de représenter la beauté, la pureté et la régularité des objets mathématiques. Chaque tentative est singulière, ce qui la rend incompatible avec la généralité essentielle de la notion dont elle veut rendre compte. Toute représentation d'un concept mathématique reste un signifiant qui ne permet pas à lui seul de recouvrir le concept. Si l'on étudie l'exemple des polyèdres réguliers, on se rend compte de cette difficulté par les différentes présentations qui en ont été faites au cours de l'histoire. Certes, la notion mathématique n'est pas simple elle-même, car elle fait partie d'un système théorique complexe de relations et d'objets géométriques eux-mêmes entretenant des rapports numériques qui ne sont souvent pas triviaux.

De Platon à Dali, en passant par De Vinci et Kepler, et jusqu'à Vladimir Skoda (Dias, 2009), nombreux sont ceux qui se sont essayés à des représentations possibles de ces objets idéaux. Chacun de ces artistes de la représentation a choisi son mode d'expression en fonction de ses propres rapports aux objets : Platon en poursuivant un projet philosophique, Dali dans une quête mystique, Kepler dans une tentative d'argumentation cosmologique et Skoda dans la recherche d'une signification du concept de limite[22]. *In fine*, personne n'a tort, et personne n'a raison. Au sens de Ricœur (1984), chacune de ces configurations nous entraîne dans un processus individuel et subjectif d'interprétation. Nous serons ainsi plus sensibles, ou plus réceptifs à la représentation des polyèdres réguliers dans le tableau *La dernière cène* de Dali ou dans leur présence explicative au sein du *Mysterium Cosmographicum* de Kepler sans savoir exactement pourquoi.

Mathématiquement parlant, un polyèdre est dit régulier si, et seulement si, il est constitué de faces toutes identiques et régulières, et que tous ses sommets sont identiques[23]. Ils sont au nombre de neuf, dont cinq sont convexes et étaient connus depuis Platon[24].

22. Vladimir Skoda propose des installations autour de la notion de sphère qui permet d'inscrire mathématiquement tout polyèdre régulier.

23. C'est-à-dire qu'à chaque sommet correspond le même nombre de faces.

24. Les cinq solides font l'objet d'une présentation et d'une argumentation cosmologique dans le Timée.

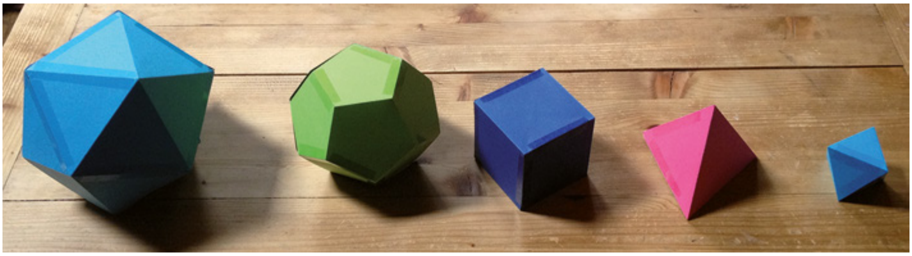

Fig. 1. Les cinq polyèdres réguliers.

Comme pour tout objet mathématique, on peut affirmer qu'il est impossible de voir ces solides parfaits idéaux. En revanche, leur mimesis (au sens d'Aristote) est possible. On peut toujours en créer une imitation en tant qu'auteur, ou en temps qu'artiste. Ainsi, peut-on dessiner, construire dans des matériaux divers et décrire symboliquement les polyèdres réguliers. Chacune de ces représentations personnelles de la réalité fournit un regard sur la notion théorique concernée. On choisira alors les éléments de son œuvre sur lesquels on souhaite attirer l'œil du spectateur en racontant sa propre histoire comme un témoignage de la relation entretenue avec l'objet. On choisira ses propres mots pour parler des choses (Foucault, 1966). On sera alors irrémédiablement confronté au célèbre paradoxe langagier exprimé par Magritte dans sa double présentation d'une pipe qui est déclarée comme n'en étant pas une. À chacune de nos présentations d'un polyèdre, on pourra alors associer la formule langagière la plus honnête qui soit, à savoir : « *Ceci n'est pas un polyèdre.* »

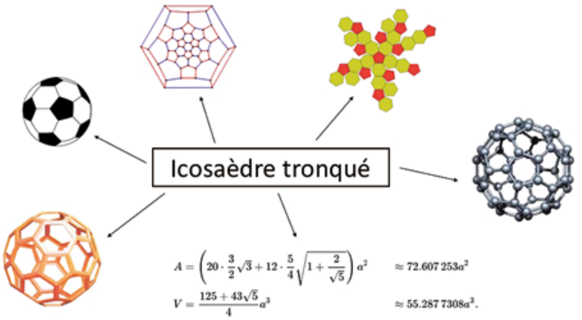

Fig. 2. Points de vue sur un polyèdre (Dias, 2012).

Cependant, nous sommes tous des mathématiciens (Dias, 2015), créateurs libres de nos actes et de nos gestes. Alors, on essaie encore et encore… On re-présente en poursuivant la quête d'un Graal, celle d'une orientation plastique, esthétique, technologique, à chaque fois créative, car adaptée aux contraintes locales, et toujours novatrice pour son auteur ! Les artistes ou plus modestement les artisans que nous sommes, travaillons non seulement avec nos instruments et nos matériaux fétiches, mais aussi avec notre bagage cognitif. Cette valise intellectuelle étant elle-même constituée de ce que nous savons des éléments qui composent l'objet que nous souhaitons donner à voir. C'est ainsi que le simple tracé d'un de ces polyèdres, ou sa construction en carton, est à la fois une mimesis originale pour son auteur et une simulation de la réalité géométrique qui lui correspond pour son spectateur. Pour l'auteur, elle est la réalisation la plus adaptée au contexte dans lequel elle a été élaborée. On peut faire alors l'hypothèse que c'est l'environnement matériel et symbolique qui s'avère déterminant pour mener à bien le projet de conception. La créativité est à l'œuvre quand le milieu est adapté et, pour convoquer ici le cadre de la didactique des mathématiques, la conceptualisation est possible si la situation didactique apporte les ressources nécessaires sous forme d'expériences significatives s'inscrivant dans la durée.

> « *La durée est une caractéristique essentielle de la formation de l'expérience. La raison de fond est que la formation des connaissances opératoires consiste à la fois dans des gestes et pratiques difficiles à acquérir et dans des conceptualisations subtiles. Ces conceptualisations comportent beaucoup d'aspects différents pour une même classe de situations, et sont associées à des conditions et limites de validité d'une grande diversité* » (Vergnaud, 2011 : p. 285).

UN MILIEU FAVORABLE À LA CRÉATIVITÉ

Il est parfois difficile de convaincre le commun des mortels que les mathématiques offrent un terreau fertile à la créativité, tant la discipline souffre d'une image de marque rigide et austère. Pourtant, si son système d'organisation théorique est effectivement parfaitement réglé, il n'en reste pas moins que la mise en application des connaissances qu'il engendre est à même de favoriser l'expression de celles et ceux qui pratiquent les mathématiques. Pour peu qu'on soigne l'environnement d'apprentissage des apprenants, ceux-ci se transforment très vite en artisans des plus créatifs. Mais qu'il s'agisse d'oser à découvert ou d'investiguer le long des chemins inconnus, voire de se confronter volontairement à l'incertitude de l'issue d'un processus, rien de tout cela n'est aisé. Dans ce projet d'élaboration d'un milieu propice aux apprentissages, il faut composer avec les ingrédients qui permettent l'expression de toutes les personnalités, le tout dans un climat bienveillant susceptible d'accueillir autant la nouveauté que l'échec. Et même, s'il faut bien reconnaître que les conditions hostiles ont parfois permis dans l'histoire l'expression d'une création indéniable, il n'en est pas de même à l'école. Ce contexte particulier a ses propres spécificités en la matière. Il est question d'y cultiver le plaisir, la bienveillance et la compréhension. Selon nous, trois dimensions semblent propices à bâtir un milieu d'enseignement et d'apprentissage propice à la créativité : culture, esthétique et adaptation.

La dimension culturelle pour favoriser les rencontres

Construire les mathématiques peut être assimilé à une série de créations à la fois re-créatives et récréatives. Nous parlons de processus de re-création pour décrire les processus de mise en œuvre des connaissances dans nos expérimentations sur les polyèdres par exemple. Les élèves en situation d'apprentissage mènent à bien des projets d'élaboration d'objets qui, lorsqu'ils aboutissent, se révèlent à eux comme des créations personnelles. Ils en sont les auteurs. Comme l'apparence définitive de l'objet construit n'était pas connue *a priori*, on observe souvent une certaine jubilation dans l'appréciation finale. Ceci se traduisant par exemple par une séance de photos agrégeant les œuvres et leurs auteurs comme nous l'avons constaté dans nos expérimentations avec des adultes en formation. En tant que spectateurs de ces « performances », nous prenons la précaution de nommer ces productions des re-créations en fonction de l'ancrage des représentations dans un corpus préexistant. Chacun des objets élaborés l'a en effet été auparavant dans d'autres expériences, que les auteurs n'ont bien évidemment pas vécues.

L'aspect récréatif prend, quant à lui, naissance à la fois dans la dimension ludique des situations que nous proposons, et aussi dans l'aspect collaboratif des activités. La taille des objets étant particulièrement importante, la nécessité d'une organisation des actions s'impose de manière presque systématique, comme nous l'avons constaté lors de nos différentes expérimentations de formation. Les participants entrent en effet assez rapidement dans une sorte de jeu de construction pour lequel ils n'hésitent pas à partager leurs ressources, leurs idées et leurs hypothèses de conception. Ils poursuivent un but commun, résolvent les problèmes qu'ils rencontrent, progressent dans les étapes d'élaboration et apprécient *in fine* le travail réalisé : le but du jeu est atteint !

L'objet mathématique est là, devenu concret, directement accessible aux sens. Et même si ces constructions ne sont que des compromis avec la réalité, elles sont cependant reconnues comme des créations humaines ancrées culturellement et riches de valeurs esthétiques. Ce que nous explorons avec ces créations géométriques est la possibilité de construction d'un nouveau point de vue sur des objets mathématiques par une représentation sensible. Notre hypothèse étant que ce processus puisse permettre un accès progressif à la compréhension des concepts mathématiques qui leur sont sous-jacents : propriétés, relations, objets spécifiques. Nous souhaitons dire ici que nous sommes conscients que cette transition de l'objet signifiant à sa référence théorique ne relève pas d'un processus interne au sujet qui expérimente. Nous avons en effet constaté qu'une médiation était nécessaire, qu'elle soit sous une forme d'étayage de l'expert qui accompagne ou qu'elle relève du partage des connaissances entre les sujets qui expérimentent. Dénoter, décrire et apprécier l'objet construit est un processus qui change progressivement le statut de la chose en objet de connaissance. Vision et perception laissent la place à interprétation et compréhension. L'accès à la culture nécessite une forme de médiation.

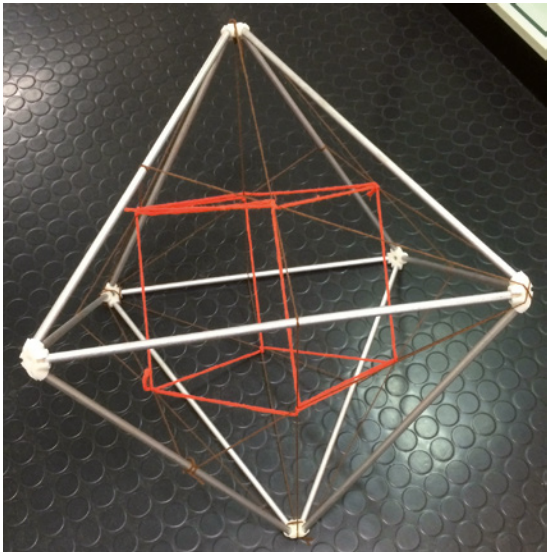

Fig. 3. Représentation du concept de dualité entre les polyèdres réguliers.

On peut donc parler d'une confrontation des points de vue différents dans un même environnement didactique. Lorsqu'il s'agit de la salle de classe, l'enseignant et les élèves partagent un même espace de pratique et d'activité. Les expériences vécues des uns relevant de la situation pour l'autre, le divers empirique des élèves s'interprétant comme des signes et des représentations pour l'enseignant.

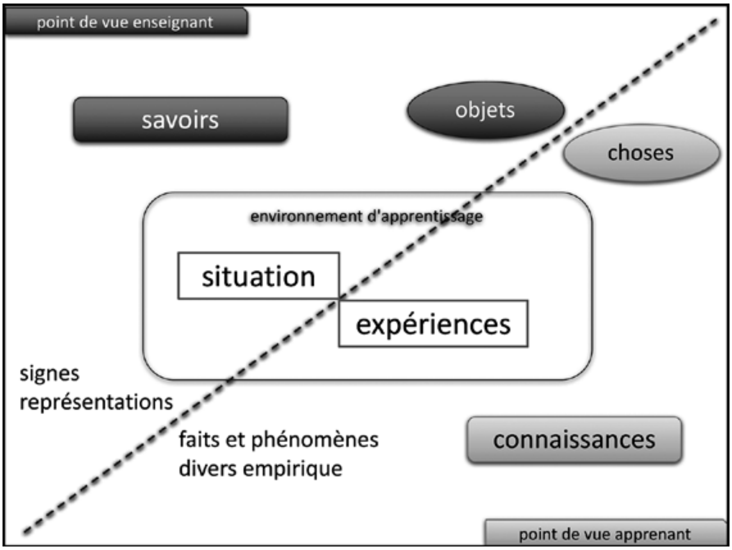

Fig. 4. Des points de vue convergents vers un milieu expérimental et créatif.

Le divers empirique dont nous parlons doit se comprendre comme un ensemble d'éléments symboliques mis à disposition des élèves, puis progressivement enrichi par les actions et les expressions langagières qui les accompagnent. Phénomènes et faits sont le substrat de cette diversité empirique qui ne se limite donc pas aux objets réels puisqu'il s'étend aux expériences de pensée toujours envisageables dans de tels contextes d'apprentissage.

Nous nous accordons à dire que l'existence des objets mathématiques relève pour partie des interprétations que les sujets en font : les élèvent agissent sur des signes, sur du matériel et éventuellement en parlent. Le professeur qui sait des choses sur ces actes ou ces mots décide (ou non) de qualifier de mathématiques ces actes et ces mots et, ainsi, participe au processus d'exhibition des savoirs en fonction de la culture qu'il en a.

La dimension esthétique comme catalyseur des processus créatifs

La place et le rôle de l'esthétique dans l'activité de conception sont en quelque sorte la dimension du design dans la créativité. L'analyser est difficile du fait de la subjectivité des rapports que nous entretenons avec les objets du monde par notre perception.

> « *Les dimensions esthétiques suscitent également des affects et des émotions de la part des différents acteurs impliqués dans les activités de conception. Les relations entre les éléments esthétiques et les affects ou les émotions dépendent certainement de la culture et de l'époque considérée* » (Bonnardel, 2006 : p. 113).

Nous avons très souvent recueilli les témoignages enthousiastes des élèves (et des adultes en formation) lors de la construction d'un polyèdre particulier : le dodécaèdre[25]. Ce polyèdre régulier est perçu de façon quasi unanime comme harmonieux et cette force symbolique semble partagée sur le plan esthétique. Nous avons ainsi souvent entendu à la fin de sa construction : « Alors celui-ci qu'est-ce qu'il est beau ! »

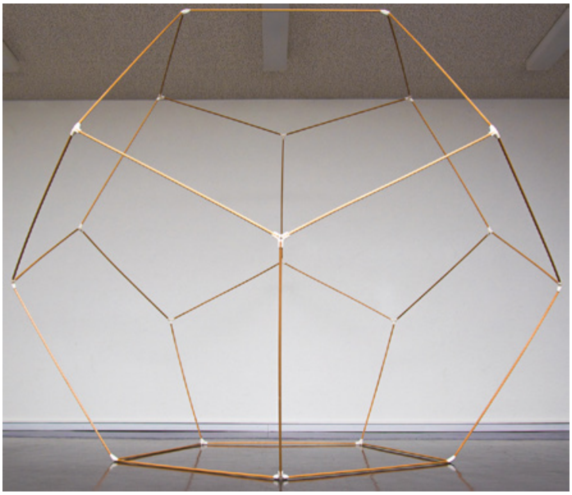

Fig. 5. Le dodécaèdre.

Une de nos hypothèses dans la mise en œuvre de nos expérimentations réside dans le fait que les objets de la géométrie sont porteurs d'une dimension certes culturelle, mais également esthétique, ce qui favorise

25. Le dodécaèdre est l'un des cinq polyèdres réguliers dits « solides de Platon ». Il est constitué de douze faces pentagonales régulières.

une forme d'adhésion *a priori* des sujets au processus d'apprentissage. S'il est en effet convenu de reconnaître que l'expression du beau dans une formule algébrique est réservée à quelques initiés[26], force est de constater que la perception de la régularité des propriétés d'un polyèdre régulier est plus spectaculaire et donc ouverte à davantage d'individus. Comme nous l'avons dit plus haut, nous avons pu remarquer que la dimension esthétique était appréciée par tous les sujets en formation, qu'ils soient adultes, adolescents ou enfants, lors de nos expérimentations. Cette valeur esthétique se révèle parfois en cours d'élaboration, prenant alors le rôle de catalyseur des actions orientées vers la conception d'un objet final.

Les médiateurs symboliques qui participent de cette esthétique et qui sont propres aux objets géométriques sont difficiles à cerner de manière exhaustive. S'agit-il de régularité, de pureté des formes, de simplicité perceptive des relations ou d'affordance ? Est-il question de convoquer dans l'expérience de conception des références culturelles rencontrées auparavant ? Ou est-il question de se confronter avec une représentation en trois dimensions qui n'est pas celle qui est la plus courante dans les situations d'apprentissage en géométrie ? Il est toujours difficile d'argumenter ses propres choix et valeurs esthétiques bien entendu, mais ce qui nous paraît remarquable dans nos expérimentations didactiques est l'invariance des réactions positives face aux rencontres esthétiques avec la représentation en trois dimensions de ces objets mathématiques spécifiques que sont les polyèdres réguliers. D'autres projets de recherche qui sont en cours devraient nous permettre de préciser nos hypothèses dans ce domaine.

La dimension adaptative comme résolution des antagonismes

Lors des ateliers de construction géométrique que nous relatons dans cet article, nous proposons aux participants des milieux matériels spécifiques constitués par un lot d'objets se rangeant dans trois catégories :

- Des baguettes de bois de longueur différentes,
- Des connecteurs en plastique permettant l'assemblage des baguettes,
- Des pelotes de laine.

Les situations proposées aux participants sont relativement ouvertes et les conduisent à utiliser l'environnement matériel en vue de l'exploration des constructions possibles sans chercher systématiquement à répondre à

26. On citera ici par exemple une relation mathématiquement célèbre et utilisée dans l'excellent roman d'Ogawa (2008) *La formule préférée du professeur*. Cette équation simplifiée possède l'incroyable beauté de relier quelques objets mathématiques pourtant relativement complexes : la fonction exponentielle, le nombre pi et le nombre i.

une consigne précise. Nous nous contentons bien souvent de formulations du type : pouvez-vous construire un polyèdre à partir de ce matériel ? Nous précisons parfois les propriétés de cet objet géométrique en donnant son nom, ou certaines de ses caractéristiques ; nous fournissons parfois une reproduction photographique ou même un modèle réduit élaboré en carton par exemple. On peut parler d'un milieu suffisamment antagoniste (Dias & Tièche Christinat, 2012) du fait de la déstabilisation provoquée par les rétroactions de l'environnement dans les constructions : assemblages impossibles, structures non stables, irrégularités des propriétés des figures (angles ou longueurs par exemple). Ces phénomènes de perturbation obligent les participants à s'adapter en permanence en convoquant les ressources qu'ils partagent de manière collaborative. Ces ressources sont alors l'expression de connaissances qu'elles soient en actes ou verbalisées dans l'action. Nous pensons que ces adaptations sont susceptibles de provoquer des créations personnelles et/ou collectives à travers les expériences des concepteurs. En suivant Bonnardel (2006), nous estimons que cette dimension adaptative vient consolider l'ambition de créativité de la situation d'apprentissage. C'est en effet sous l'effet d'un système de contraintes (Bonnardel, 2006) que la conception peut être attribuée à une création pour le moins aux yeux des participants des ateliers de géométrie. Ce système contient les contraintes issues de l'énoncé du problème, du matériel mis à disposition pour la recherche, et les contraintes qui sont ajoutées par les concepteurs en cours d'élaboration. Ce processus est donc tout à fait proche du modèle d'apprentissage par adaptation qui consiste à surmonter un déséquilibre provisoire au cours d'une situation didactique, raison pour laquelle nous osons ici faire l'hypothèse de la dimension créative de nos expérimentations didactiques.

CONCLUSION

Beaucoup de mathématiciens cherchent des formules simplificatrices capables d'expliquer des processus complexes, inspirés qu'ils sont par la quête du beau absolu. Pour eux, les formules les plus belles sont aussi les plus simples. L'une des découvertes d'Euler[27] fait ainsi partie de cet aboutissement, car elle relie dans une équation d'une grande simplicité le nombre de faces, d'arêtes et de sommets de tout polyèdre : $f + s\text{-}a = 2$

27. En additionnant le nombre de faces et de sommets d'un polyèdre puis en soustrayant le nombre de ses arêtes, on trouve toujours 2. Ce théorème, dit de Descartes-Euler, se vérifie avec tous les polyèdres convexes.

Bien sûr, on pourra objecter que ce compromis symbolique réduit à sa plus simple expression est bien réducteur de la diversité esthétique que représente le monde des polyèdres. Mais là se trouve la force du langage des mathématiques, entre culture et création. La diversité empirique qui permet la représentation des objets de la géométrie spatiale participe de la culture scientifique. Ces signes préexistent dans des répertoires de savoirs et de connaissances qui échappent très souvent à de nombreux individus qui, s'ils veulent y accéder, doivent rencontrer des environnements dédiés à leur reconstruction. Ils pourront alors concevoir leur re-présentation en suivant un processus créatif dont la nouveauté restera relative à leur ignorance, mais dont l'aboutissement garantit un certain émerveillement propre à toute situation de découverte. Toutes les mathématiques peuvent se redécouvrir dans un tel environnement riche de catalyseurs de l'action et de l'adaptation, que ce soient celles d'un formalisme toujours plus expert ou celles qui sont les plus ancrées dans la familiarité du monde qui nous entoure.

Références

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Bonnardel, N. (2006). *Créativité et conception, approches cognitives et ergonomiques*. Marseille : Solal.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat. Claude Bernard Lyon 1. Repéré à http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/

Dias, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. *Cours Pour L'école D'été de Recherche En Didactique Des Mathématiques*.

Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris : Magnard.

Dias, T. (2014). La diversité empirique pour faire exister les objets mathématiques. *Mathematics and reality*, *24*(1), 61-64. Repéré à http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm

Dias, T. (2015). *Nous sommes tous des mathématiciens*. Paris : Magnard.

Dias, T., & Tièche Christinat, C. (2012). Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé. *Espace Mathématique Francophone, Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social*. Genève.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses. Une archéologie des sciences humaines*. Paris : Gallimard.

Gonseth, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité*. Paris : Blanchard.

Lelong, P. (2004). Le réel et les concepts en mathématiques : une stratégie de création. In P. Cartier, & N. Charraud, *Le réel en mathématiques*. Paris : Agalma.

Ogawa, Y. (2008). *La formule préférée du professeur*. Arles : Actes Sud.

Ricoeur, P. (1984). *Temps et récit 2. La configuration dans le récit de fiction.* Paris : Seuil.

Vergnaud, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.-B. Barbier (dir), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris : Presses universitaires de France.