

2.2 La diversité empirique pour faire exister les objets mathématiques

Thierry Dias

Haute Ecole Pédagogique, Lausanne

Résumé : Le propos de cet article est d’interroger le mode d’existence des objets mathématiques au sein de situations d’apprentissages scolaires spécifiques proposées à des élèves ayant des difficultés ou des troubles de l’apprentissage. Ce contexte est choisi pour son « effet de loupe » sur un environnement scolaire plus ordinaire également porteur de ce type de problématiques pédagogique et didactique. Nous présenterons les environnements d’apprentissage que nous proposons aux élèves afin qu’ils s’appuient sur une diversité empirique dans leurs mises en actes susceptibles à la fois de révéler leurs connaissances mais aussi de faire exister de façon explicite les objets mathématiques qui sont les enjeux de savoirs de ces situations. Concernant les liens entre les objets mathématiques et la réalité, nos travaux s’inscrivent dans un double ancrage épistémologique et didactique, ils s’appuient sur la dimension expérimentale des mathématiques (Dias, 2008) et sur son étude au sein de situations d’apprentissages dédiées à la mise en évidence des potentiels d’acquisition et de compréhension de tous les élèves.

Des expériences pour faire exister les objets mathématiques

Nous n’inscrivons pas nos travaux dans une école de pensée épistémologique concernant la réalité des objets mathématiques (empirisme ou platonisme), nous préférons laisser la question ouverte sur ce sujet. Nous nous contenterons de dire que non seulement les débats sur ce sujet ne sont pas clos, mais aussi qu’ils ne concernent pas seulement les mathématiques. Dans la suite de cet article, nous utiliserons la définition de « l’objet » comme ce qui est placé devant, ce que l’on vise, soit pour l’atteindre soit pour le connaître. Nous posons dès lors le problème de la représentation de ces objets dans un langage (les exprime-t-il ou les détermine-t-il ?) et donc de leur mode d’existence : des constructions de l’esprit humain (Gardies, 2004) ou des idéalités (Desanti, 1968).

Notre étude fait référence au contexte scolaire dans lequel le mode d’existence des objets mathématiques nous semble très spécifique. Ainsi, même si nous revendiquons un ancrage épistémologique pour mieux comprendre les rapports que les individus entretiennent avec les mathématiques, nous n’établissons aucun *a priori* au sujet du lien avec la réalité des objets de cette discipline. Nous essayons plutôt de comprendre comment les mathématiques peuvent faire l’objet d’une didactique prenant en compte la dimension expérimentale et ainsi analyser la dialectique sensible/théorique relative à ses objets de savoir (Dias, 2008). Selon nous, recourir à la dimension expérimentale c’est permettre de nombreux allers et retours entre des objets sensibles (plus ou moins familiers) et des objets théoriques (plus ou moins formalisés) par des confrontations (adéquates ou non), des vérifications, des argumentations (prouver, convaincre). Les va-et-vient se font entre les faits objectifs et les savoirs conceptuels par divers processus tels que l’interprétation et la modélisation.

Nous explorons la mise en œuvre d’environnements didactiques propices aux expériences des sujets, en pariant sur leur rencontre possible avec la diversité des phénomènes empiriques puis sur leur capacité à comprendre notamment par le biais de la stabilisation des invariants dans les actes, les signes et les objets rencontrés. Ces rencontres et leurs conséquences étant à inscrire dans une dialectique expérience/intuition (Gonseth, 1936). Selon nous, expériences individuelles et expression langagière sont des supports pour les manifestations des « intuitions ». Le divers empirique dont nous parlons doit se comprendre comme un ensemble d’éléments symboliques d’abord mis à disposition des élèves, mais également progressivement enrichi par les actions et les expressions langagières qui les accompagnent. Phénomènes et faits sont le substrat de cette diversité empirique qui ne se limite donc pas aux objets réels puisqu’il s’étend aux expériences de pensée toujours envisageables dans de tels contextes d’apprentissage.

Nous nous accordons à dire que l’existence des objets mathématiques relève pour partie des interprétations que les sujets en font : les élèves agissent sur des signes, sur du matériel et éventuellement en parlent. Le professeur qui sait des choses sur ces actes ou ces mots décide (ou non) de qualifier de mathématique ces actes et ces mots, et ainsi participe au processus d’exhibition des savoirs.

Confrontation à la contingence des besoins spécifiques des élèves

Notre objectif est de montrer que, pour des élèves catégorisés « en difficulté », leur potentiel à apprendre en mathématiques est d’une certaine manière sous-estimé dans les activités qui leur sont généralement proposées en classe. Des activités que l’on peut caractériser globalement comme des tâches relativement ordinaires (souvent peu

problématisées) privilégiant des supports écrits (sous forme de fiches), et qui offrent une schématisation (Descaves, 1992) très formelle des concepts mathématiques. L'écueil principal étant que cette schématisation reste trop souvent non transparente pour les élèves ainsi privés de la dimension significative et donc assez facilement prisonniers de techniques ou de savoir-faire assimilable à des outils d'application. En surcroît de cette non transparence, les formes symboliques formelles utilisées par l'enseignement ne sont souvent pas mises en lien avec les faits empiriques qui permettraient aux élèves d'accéder à un degré minimal de compréhension des enjeux de ces tâches scolaires.

Nous savons que les élèves ayant des besoins spécifiques que nous rencontrons dans l'enseignement spécialisé entretiennent des relations particulières avec les objets mathématiques qu'ils ne reconnaissent et n'utilisent souvent que très mal dans les tâches ordinaires qui leur sont proposées. Ainsi, même si les connaissances sont bien là pour de nombreux élèves, la reconnaissance par le professeur de ces acquisitions est déficiente : ils ne montrent pas toujours ce qu'ils savent.

En offrant une rencontre médiatisée avec les objets mathématiques sous forme d'un environnement proposant un ancrage esthétique et technologique, nous espérons restaurer ces potentiels de développement mais également permettre aux élèves d'en prendre connaissance. Les situations didactiques que nous mettons en œuvre proposent des interactions entre des individus, des choses, et des signes sur ces choses. Pour nous, le développement des connaissances dans un tel contexte doit être assimilé à un processus dynamique garantissant sans cesse le pari de l'éducabilité.

Quels types de situations mettons nous en œuvre ?

Les tâches que nous mettons à disposition des élèves relèvent selon nous de la terminologie de situations puisque ce sont des environnements matériels et symboliques adaptés suscitant des relations et des interactions entre les protagonistes. On peut raisonnablement parler de situations d'apprentissages car elles sont reproductibles et permettent à moyen terme l'acquisition ou pour le moins l'utilisation de connaissances. Du fait de leur problématisation, les tâches comportent à la fois un certain nombre de contraintes (par exemple des questions) mais également des ressources permettant leur résolution. Le rôle de l'enseignant accompagnateur relève le plus souvent d'un étayage discret et adapté (Dias & Tièche, 2012) aux difficultés des élèves, et doit garantir essentiellement l'absence de décrochage définitif dans la résolution des problèmes rencontrés. Nous pouvons résumer cela en trois temps :

- nous proposons aux élèves des milieux matériels (sémiotiques) spécifiques et adaptés nous paraissant susceptibles de provoquer des expériences et des créations personnelles et/ou collectives,
- nous ajoutons parfois dans ces environnements des contraintes spécifiques au cours de la résolution,
- nous observons et interagissons avec les propositions faites par les élèves.

Nous travaillons essentiellement avec des constructions géométriques dans l'espace afin d'ancrer les expériences dans des dimensions esthétiques et culturelles porteuses de sens et de plaisir pour les élèves, et dans une dimension technologique (également culturelle) toujours motivante et souvent facile à dévoluer (Durand Guerrier, Dias & Pelay, 2010). Nous avons par exemple choisi plusieurs situations de manipulation et construction autour des polyèdres réguliers dont la densité didactique a été montrée (Dias, 2011). La mise en œuvre dans le contexte scolaire spécifique a elle aussi fait l'objet de travaux d'études (Serment, 2012a, 2012b), et de recherche (Dias & Serment, 2013). À chaque expérimentation menée, que ce soit en classe, en formation ou avec un public plus large, nous avons constaté que les protagonistes de ces interventions étaient à même de convoquer une certaine notion de réalité dans leurs actes et dans leurs mots. Cette notion de « réalité » ou « d'adéquation matérielle » ne se limite pas aux objets matériels, mais comprend les objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que les rétroactions du milieu, consécutives à ses actions, lui fournissent des informations fiables sur lesquelles s'appuyer pour émettre des conjectures et/ou s'engager dans un processus de preuve.

Vers un réel partagé

Comme nous l'avons annoncé dès le début de cet article, nous ne souhaitons pas prendre partie dans la dualité historique et ontologique des objets mathématiques opposant irrémédiablement le nominalisme matérialiste et le réalisme platonicien. Nous inscrivons nos recherches dans l'idée d'un processus dynamique ; d'une dialectique reliant le sensible au théorique (Dias, 2009). La réalité peut s'envisager comme un univers de significations possible, qu'elle soit objective ou seulement de pensée. Ainsi, la notion de réel perçu nous paraît limitative et nous lui préférons celle de

réel partagé (Lelong, 2004) dont le point de départ n'est pas forcément sensible. A minima, la seule volonté de faire, l'intention de réalisation de quelque chose est déjà une manifestation de réalité. Ce réel est dit partagé car il est à replacer dans le cadre spécifique d'une communauté d'individus (d'élèves par exemple si on s'en tient au contexte scolaire) qui collaborent dans leurs actes et leurs mots en vue de catégorisations permettant l'élaboration de concepts (Descaves, 1992). À la manière de Granger (1999), nous pensons que la réalité doit être entendue comme la notion de véracité : les choses et les pensées sont, ou peuvent devenir.

L'idée du réel partagé est à associer avec celle de la co-construction dans les interactions de connaissances et nous semble particulièrement appropriée pour décrire et comprendre ce qui est en jeu dans des situations d'enseignement/apprentissage autour des notions mathématiques. Nous sommes conscients que la diversité empirique que les enseignants doivent proposer à leurs élèves est une question professionnelle didactique délicate qui peut entraîner des situations de déstabilisation pédagogique. Cependant, le but que nous ne cessons de poursuivre dans nos recherches est entièrement dédié à l'étude des potentialités à apprendre de tous les élèves, cette fin justifie quelques moyens. . .

Bibliographie

- Desanti, J.-T. (1968). *Les idéalités mathématiques*. Paris : Le Seuil.
- Descaves, A. (1992). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette Education.
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage (thèse de doctorat). *Université Claude Bernard Lyon 1*, Lyon. Retrieved from <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/>
- Dias, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In é. La pensée sauvage (Ed.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques*.
- Dias, T. (2011). *À la recherche des polyèdres réguliers*. Nouveaux Cahiers de La Recherche En Éducation, 14(1), 29-48.
- Dias, T. & Serment, J. (2013). Jeux de constructions géométriques dans l'espace. Présenté aux *Journées Internationales de Etudes Scientifiques*, Chamonix.
- Dias, T., & Tièche Christinat, C. (2012). *Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé*. Présenté à Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social, Genève.
- Durand-Guerrier, V., Dias, T., & Pelay, N. (2010). *Mathématiques et réalité, une problématique centrale dans l'apprentissage des mathématiques à l'école.*, Des mondes bricolés ', Arts et sciences à l'épreuve de la notion de bricolage.
- Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris : Vrin
- Gonseth, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité*. Paris : Blanchard.
- Granger, G.-G. (1999). *La pensée de l'espace*. Paris : Odile Jacob.
- Lelong, P. (2004). Le réel et les concepts en mathématiques : une stratégie de création. In *Le réel en mathématiques*. Paris : Agalma.
- Serment, J. (2012a). *Sections du cube en version géante*. Math-Ecole, 218, 35-39.
- Serment, J. (2012b). Les constructions géométriques dans l'espace pour l'apprentissage de la géométrie (mémoire de master of arts en enseignement spécialisé). *Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud de Lausanne*, Suisse.