THIERRY DIAS

L'APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE DANS LA SCOLARITE OBLIGATOIRE : UNE DIALECTIQUE ENTRE OBJETS SENSIBLES ET OBJETS THEORIQUES.

L'APPORT DU CONTEXTE DE L'A.S.H. (ADAPTATION ET SCOLARISATION DES ELEVES HANDICAPES) : UN ENVIRONNEMENT DIDACTIQUE SPECIFIQUE ET ECLAIRANT

résumé

Ce cours traite de la nature des objets mathématiques et plus précisément de leur lien avec la réalité dans une perspective d'analyse des situations d'apprentissage en géométrie. Nous développerons l'idée principale que le passage du sensible au théorique relève d'une dialectique et ne se limite pas à une transition progressive et linéaire de l'un à l'autre. En appui sur des situations de recherche en géométrie, nous interrogerons le milieu de type expérimental (Bloch, 2001). L'analyse portera sur le travail des élèves et celui de l'enseignant; mais aussi sur le langage et les actions portant sur les objets. Le cadre choisi pour l'étude des corpus provient de l'enseignement spécialisé.

Abstract 1

This cours is about the nature of mathematical objects and more precisely about their connection with reality, in the view point of learning situations analysis in geometry. We will develop the main idea that the transition from sensitive object to theoretical object is a dialectical process which is not restricted to a progressive and linear transition from one to an other. With the analysis of research situations in geometry, we will question the experimental environment (Bloch, 2001). The analysis will concern the students' work and the teacher's as well; but also the language and the actions related to these objects. The framework of the corpus study comes from the specialized education.

Abstract 2

This class is about the nature of mathematical objects and more precisely about their connection with reality, with the objective of analysing learning situations in geometry. We will develop the main idea that the transition from sensitive object to theoretical object is a dialectical process which is not restricted to a progressive and linear transition from one to each other. Based on the analysis of these research situations in geometry, we will wonder about the experimental environment (Bloch, 2001). The analysis will concern the student's and the teacher's work, but also the language and the actions concerning the objects. The framework of the corpus study comes from education for students with special needs.

Bloch I. et Conne F. (eds.), *Actes de la XIVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 1 – 23. © 2008 – La Pensée Sauvage – Editions.

table des matières

> "Lorsqu'on tente de trouver accès à des mondes éloignés, il nous faut des repères pour nous situer et des indices pour nous orienter ; et c'est dans le réel qu'il nous faut les chercher."
> F. Conne

Introduction

La terminologie "dialectique" utilisée dans le titre de ce cours renvoie au processus qui rend compte des connexions entre sujet et objet, entre pensé et donné, entre théorique et sensible :

> « …une dialectique, c'est un jeu d'idées et de concepts que nous édifions à partir de notre information, à partir du donné et de l'acquis, dans le but de [nous] mieux saisir du réel. Dans ce premier sens , une dialectique c'est donc une base relativement stable quoique provisoire et sujette à révision, de la construction discursive de notre appréhension du monde » (Gonseth, cité par Sinaceur, 1993, p.191)

Nous utiliserons le mot dialectique par opposition à une conception statique du réel et des idées, au profit du processus toujours constant de leur transformation. Nous nous situons dans une acception plutôt épistémologique de la dialectique, celle qui analyse le moment intermédiaire du passage du sensible au théorique, celle qui qualifie l'action en retour. Nous nous référons ici à Bachelard et au sens qu'il donne du projet comme la médiation de l'objet par le sujet. A travers la notion de dialectique, c'est donc la relation de médiation (qui unit et qui sépare) qui nous servira de fil conducteur tout au long de notre présentation de ce premier chapitre.

> "Peu importe que les éléments explicatifs soient pris dans le monde des choses ou dans le monde des abstraits : il suffit que nous sachions sans peine les reconnaître et les associer, les concevoir et les mettre en relation." (Gonseth, 1936).

Nous avons choisi le cadre d'analyse de l'enseignement de la géométrie du fait de la spécificité historique, épistémologique et philosophique de cette branche (et qui en fut néanmoins le tronc…) des mathématiques. Elle nous permet d'observer avec précision l'élaboration d'une théorie en mathématique comme un processus oscillant entre l'analyse du particulier et la recherche d'un universel passant par l'expérience, l'expérimentation et l'intuition. L'histoire des constructions des objets idéaux, objets abstraits et pensés (comme par exemple les grandeurs incommensurables) nous semble un élément intéressant dans la compréhension des processus d'apprentissage en situation scolaire. Nous souhaitons garder cette articulation épistémologie/didactique comme un modèle d'analyse des conditions permettant la réussite dans l'accès à la connaissance des élèves.

Notre étude sera centrée sur la question des objets présents ou sous-jacents dans les situations d'apprentissages proposés aux élèves. Elle ne se limitera cependant pas à l'inventaire "aprioriste" de l'enseignant qui prépare le dispositif didactique dans un souci légitime d'adaptation des objets de savoirs aux connaissances de ses élèves. Pour ce faire, nous irons sur le terrain de la confrontation à la contingence afin d'observer les relations qui unissent les objets sensibles aux objets théoriques en construction. Nous proposerons volontairement cette confrontation sur le terrain spécifique des difficultés d'apprentissage (dans l'enseignement spécialisé) afin de tester le plus robustement possible nos hypothèses. Ce sera aussi l'occasion d'observer in situ les liens entre la géométrie et le monde sensible, pour tenter d'approcher une réponse à la question : que nous disent les mathématiques sur le réel ?

A - ARTICULATION EPISTEMOLOGIE/DIDACTIQUE

Nous situons l'enjeu de cette recherche dans les potentialités, pour l'apprentissage, de la dimension expérimentale telle qu'elle s'exprime dans le rapport qu'entretiennent les mathématiques avec la réalité. Nous nous situons dans une constante articulation entre référence épistémologique et observation didactique. Les concepts à l'étude dans notre recherche (expérience, expérimentation, objets, réel) nécessitent avant tout une explicitation s'appuyant sur la philosophie des sciences, du fait de leur relative indétermination. Les observations conduites en situation de formation et d'enseignement viennent ensuite comme des confrontations à la contingence. Ce sont ces allers et retours qui nous permettront d'avancer progressivement dans notre recherche.

1/ épistémologie : la dimension expérimentale en mathématiques

Dans notre cadre de recherche, recourir à la dimension expérimentale c'est permettre et surtout multiplier les allers et retours entre objets (réels et formels, sensibles et théoriques) par des confrontations (adéquation, non adéquation), des vérifications (confirmer ou infirmer une hypothèse), des argumentations (prouver un raisonnement, convaincre dans un débat). Les va-et-vient se font entre les modèles (puisque l'on fait référence à des objets qui ne sont pas donnés mais construits) et des axiomes. Il s'agit d'articuler forme et contenu dans la perspective ouverte par Tarski d'une définition des objets qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. Nous précisons ici que la notion de « réalité » ou « d'adéquation matérielle » ne se limite pas aux objets matériels, mais comprend les objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que les rétroactions du milieu, consécutives à ses actions, lui fournissent des informations fiables sur lesquelles s'appuyer pour émettre des conjectures et/ou s'engager dans un processus de preuve.

Il nous faut commencer par étayer cette notion de dialectique entre les objets du domaine sensible et ceux qui sont en connexion avec un registre plus théorique.

1.1 - dialectique objet sensible / objet théorique

La dialectique dont il est question fait référence à une méthode de raisonnement qui consiste à :

- analyser la réalité en mettant en évidence ses propositions et leurs contradictions,
- argumenter en vue de valider, prouver, de démontrer.
- revenir aux objets sensibles pour mettre à l'épreuve les élaborations théoriques etc…

Cette dialectique s'exprime dans le va et vient du sensible au théorique et non pas dans le passage progressif et continu de l'un à l'autre.

Nous ne traiterons pas dans ce cours la question ontologique des objets mathématiques, question difficile toujours en débat de la philosophie des sciences. Nous nous situerons dans une position intermédiaire entre les deux doctrines que représentent le platonisme et le nominalisme[1]. Nous nous contenterons de dire que non seulement les débats sur ce sujet ne sont pas clos, mais aussi qu'ils ne concernent pas seulement les mathématiques. Nous devons aussi donner ici une définition de "l'objet" comme ce qui est placé devant, ce que l'on vise, soit pour l'atteindre soit pour le connaître. Se pose alors le problème de la représentation de

[1] Platonisme : doctrine philosophique postulant que la contrepartie du concept dans le réel est un "universel", conçu comme une réalité existant à l'état séparé, dans un monde idéal (en référence à celui des idées de Platon, voir l'allégorie de la Caverne).

Nominalisme : Doctrine qui ne reconnaît d'existence à aucune entité abstraite. Sous sa forme la plus extrême, elle réduit les "universaux" au statut de simples noms et en fait donc des entités purement linguistiques.

ces objets dans un langage (les exprime-t-il ou les détermine-t-il ?) et donc de leur mode d'existence : des constructions de l'esprit humain (Gardies, 2004) ou des idéalités (Desanti, 1968).

Nous entendons par "objets sensibles" tout ce que les sens peuvent percevoir. Il s'agit des objets matériels du monde ordinaire : les objets de la nature bien entendu, mais aussi ceux qui sont fabriqués ou générés par l'homme. On peut citer comme exemples non exhaustifs de ces objets construits par l'homme : de simples dessins sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur, des écritures, des figures, des courbes, des graphiques… Un nombre non écrit, mais seulement cité peut être considéré comme sensible du fait de son caractère de familiarité avec celui qui le dit ou l'entend. Au sein de la classe de mathématique, la dialectique objet sensible / objet théorique peut s'exprimer au sein d'un passage alternatif du familier au nouveau comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce cours.

Les objets théoriques s'insèrent quant à eux dans une théorie mathématique, dans une axiomatique. Ils font l'objet d'une définition mathématique et sont caractérisés par des propriétés et des relations mathématiques. Leur existence revêt un caractère de nécessité, elle est assurée par le principe logique de non contradiction.

La question des objets mathématiques ne réside pas seulement dans leur réalité mais dans leur vérité, ou plus précisément leur véracité car en parlant de véracité on met l'accent sur la possibilité de dire la vérité sur quelque chose dans un domaine donné. Cette problématique des objets réside aussi dans ce qu'il nous apprennent sur le monde sensible. A titre d'exemple, dans une séance proposée à des élèves de collège en situation de handicap (voir le corpus analysé plus loin), on demande de construire en réalité des objets définis de manière formelle en langue naturelle qui soient aussi des objets physiques, témoignant ainsi d'une existence sensible irréfutable. L'importance lu langage apparaît ici puisque c'est lui qui fait sens en référence à l'objet, mais de plus, il rend compte de l'existence sensible des propriétés de l'objet. On donne aux élèves une définition théorique qui fournit des règles d'action permettant la construction d'objets géométriques représentant les objets idéaux que sont les polyèdres réguliers. Ils sont alors chargés de traduire cet énoncé formulé en langue naturelle par la construction expérimentale d'objets physiques intégrant les conditions fixées qui devront prendre peu à peu le statut d'objets formels. L'enjeu est de passer progressivement de ce solide (l'objet sensible que j'ai construit) à un polyèdre (un représentant d'une famille conceptuelle d'objet géométrique). Nous proposons une illustration de cette démarche dans le tableau 1.

polyèdre ou "être un polyèdre régulier"	
question problématique : "ce polyèdre que je construis est-il un polyèdre régulier ?"	
sensible	théorique
référence : l'objet sensible	référence : l'objet géométrique
les 5 polyèdres	les 5 propriétés
contenu matériel	contenu linguistique
perception	signification
objets spatiaux, objets du monde sensible	objets du discours
se montrent	se disent
ce polyèdre	un polyèdre

tableau 1 *: illustration de la démarche*

Pour répondre à la question "ce polyèdre que je construis est-il un polyèdre régulier ?" il est nécessaire de :

- décrire les caractéristiques visibles du solide objet unique (car je l'ai construit) du monde sensible : type de faces, nombre de sommets à chaque angle, forme convexe, une description qui ne prend pas sa source uniquement dans l'observation mais aussi par la mise en mouvement (orientations dans l'espace, multiplicité des points de vue);
- mettre en rapport ces observations caractérisées avec les propriétés conceptuelles énoncées (dans la définition) d'un polyèdre régulier.

Un exemple d'actualité avec la sphère

Quelle réalité pour la sphère ? De l'objet théorique à l'objet sensible, quel modèle, quelle représentation, quelle approximation ? Nous développerons ici une solution : des allers et retours entre ce que l'on sait et ce que l'on peut faire en étudiant un défi technologico-théorique actuel : les sphères de "Gravity Probe B".

Gravity Probe B est une expérience lancée en avril 2004 sur une orbite polaire à 650 km d'altitude environ. Cette sonde de la NASA a été conçue pour vérifier deux des prévisions de la théorie de la relativité générale d'Einstein dans le champ de gravitation terrestre : mesurer comment l'espace-temps est déformé par la masse de la Terre et comment la rotation de la planète entraîne cet espace-temps autour d'elle.

Le défi technologique consiste à mesurer une dérive aussi faible que 0,042 seconde d'arc /an du système inertiel ainsi constitué, ce qui nécessite de réaliser un système 106 fois plus stable que le meilleur système inertiel en service. C'est un système de quatre gyroscopes qui doit fournir cette référence inertielle stable, en l'absence totale de perturbation.

Pour construire ces gyroscopes (modèles de sphères) il faudrait atteindre technologiquement la sphère parfaite : l'objet théorique. Les quatre gyroscopes de Gravity Probe B (figure 1) sont les sphères les plus parfaites jamais réalisées de la main de l'homme, ils sont les objets les plus ronds et les plus homogènes que l'on trouve dans l'univers. Ces objets constituées de quartz et de silicium fondu ne s'écartent jamais de la sphère parfaite de plus de 40 couches atomiques…

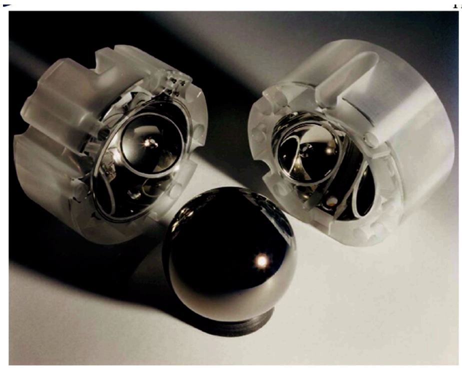

figure 1 *: les gyroscopes de GPB*

Une telle sphère sert de paradigme à la notion d'objet mathématique qui a toujours été au cœur de débats ontologiques. La sphère (empirique, approximative, matérielle) la plus parfaite du gyroscope représente ce que la science et l'ingénierie d'aujourd'hui peuvent faire de mieux. Elle a nécessité plus d'une vingtaine d'années de travaux d'ajustements des objets réels construits à l'objet théorique. Malgré tout, cela ne correspond pas à notre conception d'une sphère parfaite. Cette idée qui n'a de sens que dans le contexte d'un style de pensée géométrique, détermine cependant une réalité.

Il nous faut revenir ici sur ce que nous entendons par réalité en référence à Lelong (Lelong, 2004) qui s'intéresse à la place des objets dans la construction des connaissances. Il utilise la formulation du réel partagé qui doit être, selon lui, différencié du réel perçu. La distinction porte essentiellement sur la notion de perception qui ne doit pas être réduite à une fonction empirique réduite au sensible et qui ne dépendrait que de l'attention. En considérant les facultés d'intention de l'individu, on peut mettre en évidence une perception de type cognitive qui n'est pas contrôlée par les sens mais par la connaissance et les interactions avec les pairs. Ainsi l'affirmation d'existence de l'objet, sa réalité, est elle fondée aussi sur des rapports de type logiques.

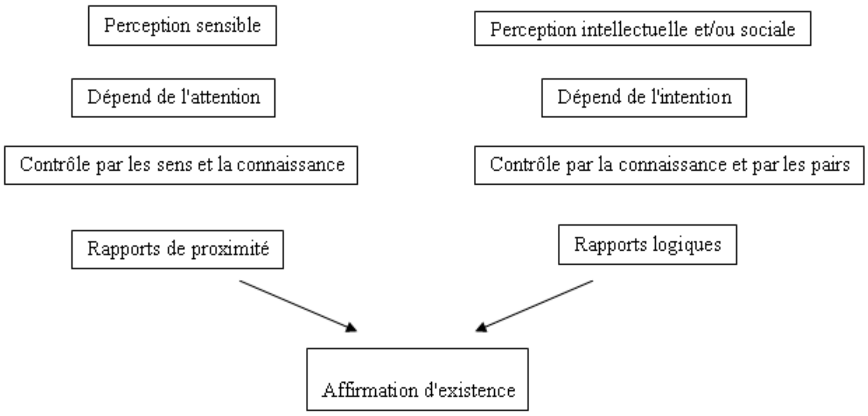

figure 2 *: deux voies d'affirmation de l'existence selon le type de perception.*

Cette théorie du réel partagé permet de tisser des liens entre la construction des connaissances par le recours au langage et l'activité mathématique des élèves en situation de recherche. Le langage mathématique est en quelque sorte un langage de laboratoire créé dans des conditions contrôlées, il contribue à l'affirmation d'existence : la réalité. En sciences, la réalité est progressivement déterminée, c'est une réalisation. Les objets mathématiques sont eux aussi des productions, ils peuvent paraître indépendants de leur processus de production, mais ils ne le sont pas :

> La rationalité de la représentation scientifique du réel consiste en la soumission à une critique sous la double forme d'une confrontation réglée avec l'expérience et d'une explicitation des règles de calcul et d'une vérification de leur respect. La science représente le réel, une représentation qui se défini comme ce qui est et ce qui pourrait être : la virtualité. GG Granger

Nous conclurons avec Nicod (Nicod, 1923) qui entreprend d'inverser totalement les processus en construisant une géométrie naïve dont les termes primitifs ont l'originalité d'être interprétables par des données sensibles. Les concepts scientifiques usuels seront alors explicitement recomposés à l'aide de ces données du monde sensible. Il s'agit pour lui de tendre vers une forme d'axiomatisation des structures de notre expérience sensible, naïve et pré-scientifique du monde. Ainsi, l'un des apports de la thèse de Nicod est d'édifier une théorie géométrique dont l'un des «modèles» ait pour domaine un ensemble d'entités capables d'être appréhendées dans l'expérience perceptive. Dans le système qu'il bâtit, c'est la notion de volume qui représente l'élément de base, et non le point puisque la première est facilement appréhendable dans la nature.

Cette méthodologie de présentation des savoirs nous semble mettre en lumière le processus d'élaboration des connaissances qui lui est lié. Le sujet en est l'auteur. Dans une action non dépourvue d'intention, il procède à une intervention sur les objets du monde selon un processus que l'on peut qualifier d'expérimental. Il est dès lors nécessaire d'expliciter ce que nous entendons par expérimentation afin de distinguer notamment expérience et expérimentation en gardant notre méthodologie dialectique déjà mis en œuvre dans le paragraphe précédent.

1.2 - dialectique expérience/expérimentation

On attribue généralement deux significations différentes au mot expérience. La première relevant d'un ancrage temporel, celui de la "vie qui passe" apportant ainsi son lot d'évènements qui s'imposent à l'être humain. Un processus dans lequel le sujet peut être vu de l'extérieur comme passif. Cette assertion est dans le champ de la sensation pour l'individu et possède un caractère routinier ou pour le moins répétitif.

"expérience: signifie communément la connaissance acquise par un long usage de la vie, jointe aux réflexions que l'on a faites sur ce qu'on a vû." (Encyclopédie de Diderot d'Alembert)[2]

"L'expérience est une série d'impressions se répétant identiquement dans un ordre déterminé, et provoquant une notion permanente qui acquiert le caractère de certitude justement parce qu'elle est le produit d'identités irrécusables." (Littré, La science au point de vue philosophique, p.319)

La deuxième orientation est présentée comme une volonté pour le sujet d'intervenir sur la nature dans le but d'obtenir quelques réponses à des interrogations, ces dernières n'étant pas toutes explicites. Il s'agit de faire l'expérience des choses, de leurs contraintes, de leur résistance. La signification de l'expérience dont il s'agit ici semble donc dépendante d'une théorie, ou pour le moins d'une idée, qui la précède.

Le fait de provoquer un phénomène dans l'intention de l'étudier. (Le Petit Robert, p.1001)

Ainsi l'expérience dite "acquise" est souvent distinguée voire opposée à l'expérience dite "conquise". Reste que cette opposition terminologique n'est pas sans soulever un certain nombre de questions. La première étant que rien ne garantit l'apprentissage ni la construction de la connaissance par l'émergence de l'événement.

On peut d'ores et déjà classer ces deux assertions selon le déterminant qui précède le nom expérience et sur la préposition qui le suit. Dans le cas de l'article défini "faire l'expérience de" le sujet est placé dans un statut passif des évènements qui s'offrent à lui. C'est le sens anthropologique de l'homme d'expérience qui détermine une forme subjective car privée. Avec une tournure plus indéterminée "faire une expérience sur" on place le sujet dans un projet d'expérimentation, donc dans un processus de connaissance et d'objectivité.

On peut envisager de parler d'expérience mathématique à la lumière de Cavaillès[3] comme d'un double système de gestes sans pour autant les envisager indépendants comme il le propose; mais plutôt dans une dialectique qui les associe. Ces gestes se développant dans les deux espaces décrits par Cavaillès, un espace combinatoire pour l'expression des gestes sur les signes; et un espace opératoire pour les gestes portant sur les idéalités. C'est dans l'espace opératoire que se situent la théorie mathématique et les opérations produits de la pensée. Les signes sensibles et leurs règles d'emploi sont construits dans l'espace combinatoire. Mais l'intersection de ces espaces existe : c'est en effet le sujet lui même, celui qui écrit et qui pense, l'auteur unique de ces gestes. Il nous faut déterminer le mot *geste* en référence à Châtelet (Châtelet, 1993), un geste qui ne se laisse pas réduire à l'acte mais qui comporte une intentionnalité. Il s'agit d'un mouvement s'inscrivant entre physique et mathématique traduisant une forme de pensée de l'espace, plus précisément de l'espacement.

Une telle représentation permet de faire apparaître l'expérience comme un dialogue du sujet avec les objets. Mais ces objets ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes

---

[2] Encyclopédie de Diderot d'Alembert, version CDRom (2003), Editions REDON

[3] D'après CASSOU-NOGUES P. (2001) De l'expérience mathématique - essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès, VRIN

portant sur eux. Importons maintenant ce modèle dans le champ didactique. Un sujet "faisant des mathématiques" ne donne à voir que les gestes de l'espace combinatoire, ce qui rend difficile le processus d'enseignement. En effet, pour un enseignant, l'accès n'est permis qu'à la pratique mathématicienne du sujet qui apprend, et jamais à son activité mathématique. "Faire faire des mathématiques"[4] c'est alors créer un milieu propice à ce dialogue, un milieu objectif (matériel et/ou symbolique) dans lequel les expériences sont permises afin d'enrôler l'activité de l'élève.

Nous faisons l'hypothèse que le travail mathématique passe par l'expérience sensible et même que le développement des mathématiques ne peut se penser hors du monde sensible. Dans le processus d'acquisition du savoir, l'expérience sensible est d'abord préalable à l'expérience mathématique. Cette dernière se produit en extension et en déformation sur le même objet. Pour illustrer ceci, nous emprunterons un exemple provenant de Gonseth (1936, p.66) dans son ouvrage Les mathématiques et la réalité.[5] La présentation d'un cristal peut engendrer des constructions de connaissances dans des directions bien différentes au-delà des aspects intuitifs directement observables. Du point de départ de l'objet possédant une certaine forme, on pourra s'intéresser à sa place dans la classification des polyèdres, ou plutôt à la mesure de ses angles dièdres afin d'en étudier les symétries. Ces constructions sont autant d'extensions et de déformations de l'objet immédiat. Mais si l'expérience sensible apparaît bien première ici, il ne faut pas seulement l'enfermer dans ce rôle. En effet, les expressions et opérations qui portent sur cette première expérience vont ensuite donner naissance à des besoins de contrôle ou seulement de confrontation dans l'espace sensible du fait de l'élaboration de conjectures "bâtisseuses" de la théorie. De ce fait, ce qui est appris et conçu sur la réalité permet en retour d'agir sur elle. C'est en ce sens que l'on peut considérer l'expérience mathématique capable d'intervention sur le réel.

"Faire des mathématiques, c'est fabriquer des modèles qui permettent de maîtriser des phénomènes dans la réalité".[6]

Il est alors nécessaire de mettre à l'étude l'adéquation ou la non adéquation de ces objets à une certaine réalité bien délimitée. Epistémologiquement parlant, un détour par le raisonnement associé au processus d'expérimentation nous paraît nécessaire. Ce processus ne nous semble pas limité à celui de l'hypothèse au sens commun du terme et tel qu'il fut employé lors de l'avènement des sciences dites expérimentales aux $18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ siècle. Cette méthode "par hypothèse" qui deviendra progressivement hypothético-déductive au $20^{\text{ème}}$, ne comporte pas de référence explicite aux relations qui unissent les objets de la théorie à ceux du monde sensible du fait d'un choix résolument empirique dans la construction des connaissances. Les expériences sont conçues pour montrer des phénomènes plus ou moins spectaculaires sans recours systématique à des éléments de modélisation (il faut comprendre ici modélisation au sens de la représentation simplifiée d'une théorie). L'expérimentation relève quant à elle d'une intention d'intervention ou de création des phénomènes qui nécessite un milieu approprié à la réussite de sa démonstration. Ce milieu nous semble pouvoir se caractériser par un certain nombre de paramètres et d'éléments, c'est ce que nous essaierons traiter dans le paragraphe qui va suivre en appui sur des références didactiques.

[4] au sens de CONNE F. (1999) , Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal

[5] Ferdinand GONSETH (1936), Les mathématiques et la réalité, Albert BLANCHARD (1936) 1974, p66

[6] G. SENSEVY, Le Télémaque n°15 - Enseigner les sciences, mai 1999

2/ didactique : la constitution d'un milieu pour l'expérimentation

La notion de milieu est définie dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) comme le système antagoniste du système enseigné. Le qualificatif d'antagonisme dont il est question s'oppose à celui d'allié qui renvoie à un schéma plus classique d'enseignement dit "par ostension". Dans ce dernier, le milieu allié signifie que le professeur cherche à montrer à l'élève ce qu'il doit voir et donc comprendre. Rechercher l'antagonisme renvoie à un modèle d'apprentissage piagétien de type adaptatif : le sujet apprend en s'adaptant (assimilation, accommodation, organisation, équilibration) à un milieu volontairement porteur de déséquilibres. Le professeur en est le concepteur et l'organisateur, c'est lui qui en choisit les variables. L'une des principales difficultés, dans ce modèle, est de garantir l'adéquation entre la connaissance acquise des élèves et le savoir visé. Le milieu apparaît d'avantage comme un système que comme un espace aux contours définis.

Le milieu ainsi défini en didactique des mathématiques suscite plusieurs analyses, plusieurs acceptions notamment selon le point de vue que l'on adopte pour les formuler. Nous avons choisi une étude dans le champ géométrique car nous pensons qu'il est fortement empreint d'éléments épistémologiques et culturels importants dans la constitution d'un tel milieu : c'est donc un point de vue. Nous faisons l'hypothèse que cette dimension culturelle modifie les conditions d'adaptation de l'élève aux difficultés, contradictions et déséquilibres qu'il rencontre au cours de la construction de ses connaissances. C'est aussi l'occasion de questionner les éléments qui facilitent la dévolution des situations d'apprentissages proposées, processus délicat s'il en est et que nous essaierons d'étudier au sein d'un dispositif de type laboratoire. Les laboratoires de mathématique dont il est question font référence aux propositions de la commission Kahane (Kahane, 2002) proposant de créer dans tous les lycées et collèges des lieux d'apprentissage expérimentaux tels qu'ils existent déjà pour les autres disciplines scientifiques (physique, chimie, biologie).

2.1 Milieu épistémologique et culturel

Nous souhaitons commencer ici par l'énoncé de la conjecture suivante : en tant que science, la géométrie n'est pas l'apanage des "mathématiciens" ni même des mathématiques. Les exemples qui étayent cette conjecture sont nombreux : en ethno-mathématiques[7], en arts plastiques, en architecture, en ébénisterie, etc…. Nous nous intéresserons ici au cas spécifique des polyèdres réguliers puisque ce sont les objets qui serviront dans le cadre de la confrontation à la contingence développée plus loin.

De Platon à Dali, en passant par De Vinci et Kepler, les objets sensibles qui représentent les polyèdres l'ont toujours été en vue de la traduction d'objet formels, comme pour prouver leur existence, mais aussi pour déterminer les concepts (leurs règles et leurs définitions) qu'ils représentent. Cette quête d'orientation parfois sacrée, a traversé les siècles portée par des personnages n'étant pas tous géomètres au sens moderne du terme, c'est-à-dire spécialistes d'une branche particulière des mathématiques.

Plus près de nous, Vladimir Skoda[8], artiste tchèque, propose une belle représentation des solides de Platon dans une installation (figure 3).

Il est impossible de voir ces solides parfaits« eux-mêmes » comme on peut voir la sphère presque-parfaite du gyroscope. Impossible en pratique et impossible en principe, car ce sont des objets abstraits introduits dans le discours.

[7] Voir par exemple le site CultureMATH : http://www.dma.ens.fr/culturemath/

[8] Vladimir Skoda est un sculpteur Tchèque auteur d'une œuvre intitulée « les 5 corps de Platon », œuvre de 2004 constituée de 5 sphères en cuivre symbolisant les cinq polyèdres réguliers présentés par Platon.

figure 3 *: Vladimir Skoda, Les cinq solides de Platon*

La construction des polyèdres, qu'elle soit dans le plan (dessins en projection ou en perspective) ou dans l'espace, relève d'une performance artistique et technique dont le rapport aux règles mathématiques qui les sous-tendent pose un certain nombre de questions. L'une d'entre elle étant : qui du formalisme ou du sensible est premier (mais faut-il rechercher l'antériorité d'un objet sur l'autre ou faut-il chercher la dialectique qui les relie). D'autres questions concernent les compétences techniques et technologiques qui sont nécessaires pour de telles constructions. Elles sont chargées de connaissances formelles géométriques telles qu'elles sont très esthétiquement décrites dans le travail de Guy le Berre sur ce sujet (le Berre, 2006). Pourtant, on savait construire techniquement les solides de Platon plusieurs siècles avant notre ère comme en témoigne le jeu de l'icosaèdre trouvé dans une tombe à Alexandrie (Pedrizet, 1931)[9].

En situation d'apprentissage, nous faisons l'hypothèse que cette dimension culturelle est un facteur qui facilite la dévolution. Nous proposons même de mettre ceci en perspective avec le concept de psychologie ergonomique d'affordance au sens de Morineau qui la définit comme une relation particulière entre l'individu et le monde qui l'entoure, relation qui relève de l'adaptation immédiate (quasi automatique au sens qu'elle n'est ni visible ni même souhaitée) entre les deux pôles. La géométrie semble en effet pouvoir être prise en compte dans ce cadre d'étude comme les expérimentations que nous menons dans l'ASH (et dont nous parlerons plus loin) tendent à le prouver.

Notre hypothèse réside dans le fait que les objets de la géométrie fortement porteurs d'une dimension culturelle favorisent une adhésion a priori des élèves au processus d'apprentissage en facilitant le fonctionnement de la boucle perception/action. Les médiateurs symboliques propres aux objets géométriques (esthétique, beauté ou pureté des formes, références culturelles associées) jouant ce rôle de facilitateurs. Nous avons par exemple souvent recueilli des témoignages enthousiastes des élèves (et des adultes en formation) lors de la construction du dodécaèdre, polyèdre régulier certes mais dont la valeur symbolique semble partagé sur le plan esthétique : "Alors celui-ci qu'est-ce qu'il est beau !"

2.2 Le milieu expérimental

Nous voulons faire ici un apport complémentaire d'outils didactiques qui sont nécessaires à la préparation/conception du milieu d'une séquence d'apprentissage en géométrie afin de caractériser un type de milieu : le milieu expérimental. Nous souhaitons nous éloigner momentanément des questions de transposition didactique portant sur le savoir car ce n'est plus le couple savoir à enseigner et savoir enseigné qui nous intéressera ici. Il s'agit de faire le point sur le réseau des paramètres qui nourrissent le travail de préparation du milieu par le professeur grâce aux données fournies par la confrontation à la contingence.

Rappelons tout d'abord le cadre d'étude du milieu expérimental a priori défini par Bloch (Bloch, 2001) :

[9] http://www.ifao.egnet.net

"Il ne s'agit pas de partir de l'enseignement tel qu'il est mais plutôt de définir des possibles effectifs de l'enseignement, afin de pouvoir tester et falsifier ses hypothèses."

Dans ce modèle de milieu, l'environnement didactique est déterminé et les valeurs des variables sont fixées. L'objet d'étude est la confrontation à la contingence, il n'est donc plus question ici de nature empirique mais expérimentale. La co-construction dans la situation entre le travail des élèves et celui de l'enseignant, entre le langage et les objets du réel sont des données didactiques importantes. Elles sont fournies par la construction (action) des élèves et fournissent des paramètres (des variables) qui interviennent directement dans le milieu du professeur : l'action pédagogique, la conduite de la classe, s'en trouve modifiée. Ces variables d'ajustement doivent être prises en compte dans l'analyse du milieu, elles peuvent en effet influer l'enseignement dans des phases ultérieures au cours de la séquence pédagogique.

En prenant en compte l'ensemble des connaissances cumulées, on détermine ainsi une caractérisation du milieu permettant le recours à la dimension expérimentale en mathématique selon plusieurs volets :

du côté enseignant : la connaissance a priori de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs,

du côté des objets : il comporte des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner,

du côté de la situation : la médiation établie entre sujets et objets est possible grâce à la présence de trois registres (syntaxique, pragmatique et sémantique),

du côté des instruments : la mise à disposition des "acteurs" d'outils de modélisation dans la situation,

du côté des élèves : les différents statuts et rôles qui sont donnés aux élèves dans la situation provoquant des types d'activité différents.

2.3 Le laboratoire

C'est au début du vingtième siècle, dans une conférence au musée pédagogique qu'Emile Borel (Borel, 1904) lance l'idée de la création de véritables laboratoires de mathématiques :

> Mais pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques.

Une proposition qui sera reprise un siècle plus tard par la commission Kahane (Kahane, 2002) dans son rapport au ministre concernant la réflexion sur l'enseignement des mathématiques souhaitant par ce dispositif donner "une nouvelle image des mathématiques et de leur aspect expérimental". L'idée de ces salles d'expérimentation en mathématiques dépasse selon nous le simple caractère matériel d'un lieu au sein d'un établissement scolaire. Il s'agit plutôt de créer un dispositif d'enseignement/apprentissage ayant ses propres particularités, ses paramètres didactiques, pédagogiques et psychologiques. Dans ce paragraphe, nous faisons donc la proposition d'un modèle d'analyse en assimilant le laboratoire à un nouveau type de milieu fondé sur la relation triadique de trois registres, des éléments qui le composent et des relations qui les médient.

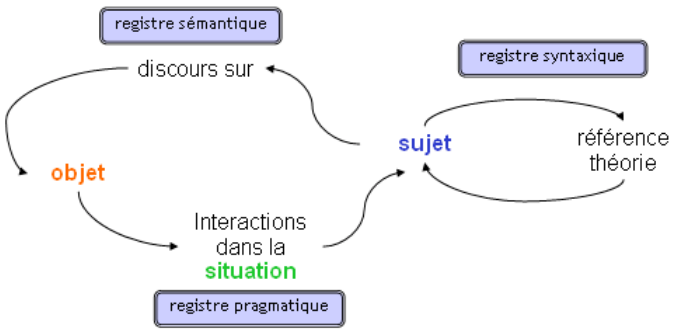

figure 4 : dispositif d'enseignement/apprentissage intégrant trois registres

Notre hypothèse est la suivante : la médiation établie entre sujets et objets est possible grâce à la présence de trois registres. Un registre sémantique permettant le discours sur les objets sans lequel le dialogue entre les joueurs (au sens de la théorie des jeux développée par Brousseau) n'est pas envisageable. Un registre syntaxique représenté par la théorie de référence que chaque acteur possède a priori sur les objets et les phénomènes associés à leur mise en mots et en actes. Des conflits naissants de la confrontation de ces théories sont alors à l'origine de la formulation de problématiques, d'hypothèses et de conjectures. Enfin, un registre pragmatique abordé dans une phase expérimentale fortement contextualisée où chaque joueur peut (ou non) modifier son propre rapport aux savoirs et connaissances grâce aux interactions qu'il y développe.

Cependant, nous souhaitons marquer la différence entre les types d'objets dans le cadre dialectique que nous poursuivons : objet sensible et objet théorique (figure 5). Ceci permet notamment de confirmer la place et le rôle de l'enseignant dans le milieu puisque c'est lui qui met à disposition des élèves les signes (matériels, langagiers et ou symboliques) représentant les objets théoriques sous jacents.

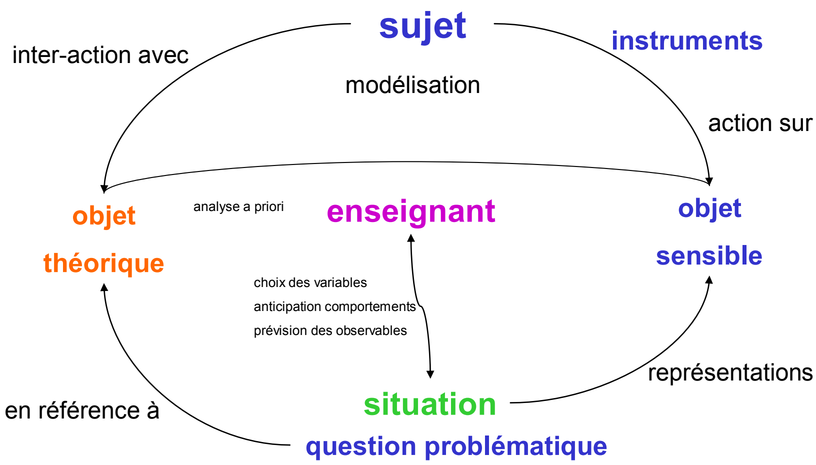

figure 5 : dispositif d'enseignement/apprentissage dans le milieu laboratoire

En référence à la phase d'action telle qu'elle est caractérisée dans la théorie des situations didactiques, nous pensons que le sujet en situation d'apprentissage agit prioritairement sur les objets sensibles qui sont mis à sa disposition. Son action est cependant déterminée (et non pas spontanée) par ses connaissances qui s'expriment dans les procédures personnelles de résolution de problème qu'il met en œuvre. Dans la situation des polyèdres, les constructions premières des élèves s'appuient sur des connaissances théoriques comme par exemple : un angle dièdre est formé par l'intersection de plus de deux faces. Les constructions et manipulations peuvent être assimilées à des phases d'expérimentation, puisqu'elles expriment une volonté d'intervention sur les objets du monde. On voit que cette phase d'action se déroule par expérimentation sur les objets sensibles en référence aux objets théoriques qui les sous-tendent. La dialectique s'exprimant dans les allers et retours entre les deux types d'objets engendrés par les réponses (antagonistes ou non) du milieu. C'est la volonté de contrôle de ce milieu qui permet aux élèves une forme de maintien de l'orientation (Bruner, 1983).

Ces interactions se situent dans un projet intentionnel d'expérimentation (et pour partie de modélisation) qui est rendu possible par les éléments présents dans le milieu (y compris l'enseignant, ses savoirs et ses interventions). Ils sont principalement issus des données de l'analyse a priori conduite en amont par l'enseignant, mais aussi engendrés in situ par les processus successifs d'adaptation. Ainsi la caractéristique d'un tel milieu que nous appellerons laboratoire tient dans l'ensemble des relations qui dialectisent les cinq pôles (sujet, objet sensible, objet théorique, situation et enseignant) du modèle descriptif de l'apprentissage dans un tel contexte.

Conclusion de la première partie

Nous avons terminé ici notre détour épistémologique et didactique au service d'une explicitation de ce que nous entendons par dialectique des objets. Ceci a permis finalement d'élaborer une modèle de milieu a priori pour un dispositif d'enseignement/apprentissage en référence à la notion de laboratoire. Nous souhaitons nous consacrer dans une deuxième partie à la confrontation à la contingence afin d'expérimenter notre cadre de réflexion.

B – CONFRONTATION A LA CONTINGENCE

Dans cette deuxième partie du cours, nous essaierons d'analyser quels sont les effets de la prise en compte de la dimension expérimentale dans le milieu d'une situation didactique. Nous étudierons les variables productrices des effets observés tant sur les démarches d'enseignement que sur les apprentissages des élèves. Nous utiliserons une situation didactique relevant de la géométrie dans l'espace afin de mettre à l'épreuve notre modèle de référence culturelle pour les objets mathématiques.
L'analyse d'un corpus langagier transcrit d'une situation de classe, devrait alors nous permettre de mettre en évidence les allers et retours entre les objets sensibles et les objets théoriques dans le cadre d'une démarche de résolution d'un problème de recherche.

1. Apports du contexte de l'ASH

Le contexte de l'ASH (adaptation et scolarisation des élèves handicapés), par la spécificité de ses environnements didactique, pédagogique et sociétal, fournit un observatoire privilégié pour étudier les questions qui nous occupent ici relativement à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Il permet en particulier de jouer sur un effet de loupe dans le sens où les difficultés rencontrées sont en quelque sorte exacerbées. Il soulève notamment quelques interrogations importantes sur l'enseignement, en particulier celle de l'adaptation puisque le public de ce contexte d'apprentissage en difficulté reconnue, n'en est pas moins susceptible d'apprendre.

L'effet loupe du contexte tient vraisemblablement à la stigmatisation des difficultés d'apprentissages (en regard de l'écologie générale des dispositifs ASH : orientation des élèves, formation des enseignants) ou pour le moins mis en lumière du fait de leur représentativité statistique (proportion plus importante d'élèves en difficulté d'apprentissage, mais aussi d'enseignants en difficulté d'enseignement)

L'un des enjeux de notre recherche est l'étude de la possibilité de la création des conditions pour un regard différent sur la pratique et l'activité mathématiques des élèves dans un cadre bien défini : celui de la résolution de problèmes de recherche. Sur le "versant élève" de l'apprentissage, l'obstacle récurent du contexte de l'ASH (tel qu'il est soulevé par une majorité d'enseignants spécialisés), réside dans une priorité de la restauration de l'intention d'apprendre.

Le cadre de la géométrie

Dans le cadre des formations que nous conduisons depuis de nombreuses années, nous avons observé que la géométrie représente un domaine de la discipline sous investi par les enseignants. Ces derniers citent souvent le manque de formation professionnelle sur la question, mais il est aussi fait référence à des objets de savoirs relativement indéterminés ou trop ancrés dans le formel (pas assez dans l'expérimental). Cependant, ces enseignants constatent que la géométrie est un domaine très prisé des élèves. On cite par exemple le succès des situations de communication, de l'utilisation des logiciels de géométrie, des constructions dans le plan et dans l'espace (du fait de leur prise sur le sensible). Les liens inter-disciplinaires servent d'argument par exemple avec les disciplines artistiques (place de la création, du "beau", d'un espace de liberté ou moins contraignant).

La scolarisation des élèves à besoins spécifiques

En février 2005, la loi sur le handicap lance un nouveau défi pour l'école : celui de la scolarisation de tous les élèves en situation de handicap[10]. La conséquence principale de cette loi est une nécessaire adaptation qui doit porter d'avantage sur les démarches que sur les contenus (l'exemple connu auparavant était celui de l'alignement de la SEGPA sur les programmes du collège). La loi parle explicitement du droit à compensation ce qui légitime le processus d'adaptation à la charge des enseignants. Pour réussir dans cette mission, l'Ecole ne doit cependant rien abandonner de ses ambitions concernant les connaissances et les compétences à acquérir. L'essentiel de ses efforts doit donc porter sur l'adaptation des démarches et des méthodes afin de ne pas priver les élèves en situation de handicap de véritables apprentissages.

Nous faisons cependant le constat suivant : alors que les élèves en difficulté ou en situation de handicap ne sont pas privés ou dénués de capacités cognitives on leur propose encore trop souvent des tâches minorées tant par le contexte que par le contenu comme réponse à leurs besoins. Avec d'autres auteurs, nous faisons au contraire l'hypothèse qu'il est possible de proposer à ces élèves des situations robustes favorisant le recours à la démarche expérimentale. A l'appui de cette hypothèse, nous avons mis en œuvre une ingénierie didactique que nous décrivons ci-dessous.

---

10 « Constitue un handicap, au sens de la présente loi, toute limitation d'activité ou restriction de participation à la vie en société subie dans son environnement par une personne en raison d'une altération substantielle, durable ou définitive d'une ou plusieurs fonctions physiques, sensorielles, mentales, cognitives ou psychiques, d'un polyhandicap ou d'un trouble de santé invalidant. » Loi pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées du 11 février 2005

2. *Situation et contexte*

2.1 - présentation de la situation

Les enjeux mathématiques de la situation se situent du côté de la question : pourquoi n'existe-t-il que cinq polyèdres réguliers.

Le problème proposé aux élèves fait partie de la catégorie des "problèmes de recherche" tels qu'ils sont définis dans le document d'application des programmes intitulé du même nom. Ce sont des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. Ce problème est fondé sur l'énoncé suivant :

Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes.

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.

Déterminer tous les polyèdres réguliers

Le début de cet énoncé donne une définition couramment utilisée en mathématiques des propriétés des objets géométriques représentés par les solides de Platon. Le problème dévolu aux élèves est celui de la recherche exhaustive de ces types de solides, l'ouverture de la situation résidant notamment dans l'indétermination de leur nombre : est-il fini (petit ou grand) ou infini?

Afin de s'engager dans la résolution de ce problème, les élèves peuvent utiliser du matériel de construction plastique[11] (type polydrons) avec lequel de nombreux emboîtements sont possibles. Cependant les solides en construction sont assez vite soumis aux contraintes du réel sensible : en effet toutes les combinaisons de faces ne sont pas possibles ou ne conduisent pas à une réponse valide par rapport à l'énoncé.

La première phase consiste pour les élèves à sélectionner les objets plastiques pouvant représenter les objets géométriques que sont les polygones réguliers. Les objets plastiques comprennent : des triangles équilatéraux, des triangles isocèles, des carrés, des rectangles, des losanges, des pentagones, hexagones et octogones réguliers. Dans le matériel proposé, la sélection donne cinq possibilités de polygones réguliers : triangle, carré, pentagone, hexagone et octogone.

Avec ces catégories d'objets, il est possible d'envisager certaines constructions pouvant répondre aux critères fixés par l'énoncé. Au cours de leurs expériences les élèves découvrent peu à peu les assemblages valides tant sur le plan sensible que dans le registre mathématique.

Ainsi, deux axiomes parfois formulés, mais en général seulement mis en acte par les élèves rendent compte de ces contraintes :

A1. Un sommet appartient à trois faces au minimum.

A2. La somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit.

La recherche avec des triangles équilatéraux permet d'obtenir trois valeurs d'angle polyèdre correspondant à trois polyèdres réguliers : 120° pour le tétraèdre, 240° pour l'octaèdre et 300° pour l'icosaèdre.

L'étude des constructions à partir de carrés identiques est relativement rapide : en effet, si l'on assemble 3 carrés pour former un sommet on achève la construction et on obtient

[11] Le matériel est fourni par l'enseignant et seulement mis à disposition des élèves sans obligation d'utilisation. A ce niveau d'apprentissage, tous les élèves l'utilisent, ce qui n'est pas forcément toujours le cas en formation d'adultes.

l'hexaèdre régulier (le cube). En essayant l'assemblage de 4 carrés on trouve la limite constituée par le plan :

L'étude des possibilités de construction avec des pentagones réguliers est elle aussi très courte, elle conduit à la découverte d'un seul polyèdre régulier : le dodécaèdre dont la valeur esthétique est une référence très partagée par les élèves. Il est bien entendu impossible d'assembler 4 pentagones réguliers (ou 4 octogones réguliers) sur un seul sommet en respectant le critère de convexité.

Pour terminer, l'assemblage de 3 hexagones réguliers conduit à la même "impasse" qu'avec 4 carrés : le pavage du plan. Cependant, dans le cas de l'hexagone, le réel sensible constitué par les matériaux utilisés, pose problème aux élèves : du fait de la souplesse de la matière plastique, la forme solide en cours de construction avec plusieurs hexagones semble vouloir plier ! Pour invalider cette proposition les bâtisseurs de solides devront faire quelques allers et retours entre les objets du monde sensible qu'ils utilisent comme outils de modélisation, et les objets géométriques qui leur correspondent. Le point nodal de la situation réside ainsi dans l'impossibilité matérielle de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales, ce fait concordant avec la propriété que ces mêmes hexagones isométriques permettent de paver le plan. Ce problème (Dias & Durand-Guerrier, 2005) pose donc de manière "naturelle" la question des relations entre le plan et l'espace et la confrontation avec la réalité s'avère alors "cruciale". L'hypothèse étant que cette situation de résolution de problème va permettre la rencontre effective avec la question "Peut-on réaliser un polyèdre convexe avec des hexagones réguliers isométriques ?".

Si la consistance et la robustesse didactique de ce problème de recherche ne sont plus à démontrer (Dias et Durand-Guerrier, 2005), faisons quand même ici un rapide commentaire sur l'analyse a priori de cette situation didactique.

Les élèves possèdent quelques connaissances soit scolaires essentiellement de l'ordre du lexique (vocabulaire de base de la géométrie comme côté, sommet, etc…), soit culturelles, de ces objets particuliers que sont les solides de Platon. Le cube étant par exemple souvent cité a priori comme un représentant de cette "famille" sans avoir besoin de le construire, du fait de ces nombreuses références culturelles et sociales. C'est un objet du monde sensible ayant donné lieu à plusieurs expériences manipulatoires constitutives de la connaissance de ses propriétés. Concernant le dodécaèdre, son apparence visuelle est très souvent assimilée (à tort) à la géométrie du ballon de foot qui ne renvoie pas à un polyèdre régulier mais à un polyèdre semi-régulier constitué uniquement de pentagones et d'hexagones : l'icosaèdre tronqué. C'est donc aussi un objet faisant partie des connaissances communes, sa construction est fortement prévisible dans la phase d'essais par emboîtements des pièces plastiques.

A priori, on peut s'attendre à deux grands types d'hypothèses par rapport à la question posée. La première étant qu'il existe une infinité de ces polyèdres en référence au nombre de polygones réguliers, dont chaque représentant est inscriptible dans un cercle. La deuxième hypothèse est qu'il en existe au contraire un nombre limité, et même très petit, un nombre correspondant aux trois seuls polygones permettant de réaliser effectivement un solide convexe : le triangle équilatéral, le carré et le pentagone régulier. Les essais de construction réalisés grâce au matériel ne suffisent pas à trancher ni sur le choix du bon raisonnement, ni même sur la validité de chacun d'entre eux. Il est alors nécessaire d'engager le débat entre élèves, avec ou sans participation du professeur. Les discours portent sur les objets en jeu, des objets sensibles représentant d'autres objets géométriques. La signification des mots utilisés, et parfois leur indétermination, aura alors une importance fondamentale lors des échanges langagiers. L'ambiguïté d'un mot comme côté en étant un exemple (cf. Atelier A.C. Mathé & T. Barrier).

Le principal obstacle mathématique de la situation d'apprentissage se situe dans la découverte de l'axiome 2 : la somme des angles des polygones au sommet d'un polyèdre convexe est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit. Sa formulation n'étant que fort peu probable, il faut compter sur les outils de modélisation que représente le matériel mis à disposition pour le voir émerger "en acte" par assemblage de formes identiques qui pavent le plan. C'est l'ensemble de toutes ces actions et leur mise en mots qui est à l'origine des débats et des contradictions : par exemple celle du pavage ou non du plan par assemblage des hexagones. Il est alors attendu des énoncés argumentatifs en vue de tentatives de validation des conjectures émises.

2.2 - Présentation du corpus : contexte

La classe d'accueil que nous avons choisi relève d'un dispositif de l'enseignement spécialisé français : une unité pédagogique d'intégration (UPI) d'un collège de la banlieue lyonnaise. Cette unité pour élèves présentant des troubles spécifiques du langage (UPI-TSL) créée en septembre 2004, en est à sa première année de fonctionnement. La structure est sous la responsabilité pédagogique d'une circonscription et d'un inspecteur de l'éducation nationale ASH (Adaptation et Scolarisation des élèves Handicapés) du premier degré. L'enseignante professeur des écoles est expérimentée mais exerce dans ce contexte pour la première année. Elle a sollicité une année de formation spécialisée qu'elle a obtenue.

Le collège est situé en réseau d'éducation prioritaire sur le plateau des Minguettes à Vénissieux (69) en zone dite "violence". Il comporte 660 élèves qui proviennent des écoles primaires du même secteur. Il intègre également deux classes d'accueil pour des élèves nouvellement arrivés en France.

Les élèves de l'UPI

La classe est constituée de 10 élèves tous orientés par la commission départementale de l'éducation spéciale[12] présentant des troubles spécifiques du langage (dyslexie, dysphasie, troubles associés)

Ces élèves sont par ailleurs intégrés dans deux classes de sixième et une de cinquième du même collège. Les temps d'intégration en cours de mathématiques sont divers selon les élèves (certains sont intégrés partiellement d'autres complètement) et peuvent varier dans le courant de l'année en fonction des évolutions de chaque situation individuelle. L'effectif de la classe est le suivant : six élèves de $6^{ème}$ et quatre élèves de $5^{ème}$.

Raisons du choix du terrain

Pour cette étude, nous souhaitions expérimenter une situation avec des élèves de collège présentant des difficultés de nature à perturber les apprentissages. Dans le dispositif UPI-TSL, la situation de handicap des élèves est relativement homogène même si la reconnaissance de ces troubles spécifiques du langage est récente. De ce fait la situation nous paraît innovante et plutôt de nature expérimentale.

La deuxième raison de notre choix était surtout liée à la pratique pédagogique de l'enseignante dans sa classe. Nous avions en effet la possibilité de nous appuyer sur une évaluation diagnostique et sur un très bon suivi des élèves du fait de l'organisation du dispositif UPI par l'enseignante. Cette dernière était de plus impliquée dans un processus de formation continue sur les situations de recherche en mathématiques, elle était donc très engagée tant pédagogiquement que didactiquement. Enfin, la classe bénéficiait d'un effectif

[12] Cette commission (CDES) a été renommée commission des droits et de l'autonomie (CDA) dans la loi de février 2005.

permettant des enregistrements audio et vidéo de bonne qualité (un accord écrit a été demandé et obtenu auprès de chaque famille concernée).

Description du dispositif de recueil des données

Les séances ont été filmées (grâce à une caméra numérique mini-DV) et enregistrées en audio (avec un appareil de type mini-disc), soit 5 heures d'enregistrement et d'observation en tout dans l'UPI TSL de Vénissieux.

La première séquence a été consacrée à quelques rappels de connaissance sur les polyèdres grâce à la manipulation d'un matériel (type polydrons à voir en annexe), le but pour les élèves étant de réaliser le plus possible de solides fermés, de les décrire puis d'en proposer un classement argumenté. Cette séquence a notamment permis de reconvoquer le vocabulaire de la géométrie dans l'espace au sein d'une situation problématique relativement ouverte. Ce fut aussi l'occasion d'amorcer la mise en mots de quelques notions clés en termes de relations, de propriétés et de classification.

Lors de la deuxième séquence, une situation de recherche a été proposée aux élèves. Elle s'est déroulée en deux temps distincts, celui de la résolution de l'énigme par chaque groupe d'élèves, puis celui de la présentation et discussion des résultats. L'objectif principal de cette deuxième phase étant alors de stimuler l'activité langagière au titre de l'explication, du débat, de la validation, de l'argumentation et de la confrontation des procédures.

Dans l'organisation de la situation, il est mis à la disposition des participants du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation type Polydron ou Clixi. Les figures proposées comprennent des triangles isocèles, rectangles ou équilatéraux, des rectangles, des losanges et des carrés, ainsi que des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones réguliers. Sont également proposés règles, compas, ciseaux, équerre etc. La mise à disposition de l'ensemble du matériel vise à faciliter le va et vient entre les objets sensibles et les objets mathématiques lors de l'activité de résolution.

Enoncé de l'énigme : Le maître du Donjon est un grand sorcier qui jette tout le temps des sorts. Pour cela il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais personne ne sait combien il en cache. Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des polyèdres réguliers*. Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon en possède ? Vous pouvez utiliser le matériel pour faire des essais de constructions.

2.3 - Quelques résultats

Du point de vue du travail sur le lexique et les définitions

Afin d'illustrer les nombreux allers et retours du sensible au mathématique caractéristiques de l'expérience mathématique, nous avons choisi de présenter ici deux extraits provenant du corpus d'étude, le premier se déroulant avec le groupe des élèves de cinquième. Il concerne un débat portant sur la fabrication de deux cubes de tailles et de constitutions différentes pour lesquels la question posée concerne la réponse à fournir à l'énigme : "Peut-on considérer que ces deux solides sont deux solutions différentes du problème ou bien qu'ils représentent la même réponse ?" Ces constructions réelles sont une tentative de réponse à un énoncé proposé dans un registre géométrique plus abstrait représenté par la définition du polyèdre régulier. Il y a donc eu un premier passage du sensible au géométrique. Mais les constructions dont il est question posent problème :

Transcription d'un moment de la recherche avec le groupe des élèves de cinquième :
On parle des deux cubes construits (figure 6) :
E_n – c'est pareil, c'est le même solide

E_n – non, regarde il a pas les mêmes pièces ici
E_n – mais si c'est pareil
E_n – non
E_n – c'est pareil en fait
P – la question est là
E_n – c'est pareil
P – c'est pareil ?
E_n – oui
P (montrant l'un des cubes) – est-ce que ça c'est un cube ?
Tous – oui
P – qu'est-ce qu'il a de différent avec celui-là ? (elle montre l'autre)
E_n – il a pas les mêmes pièces
P – c'est les pièces qui sont différentes, mais est-ce que les faces du solide sont les mêmes ?

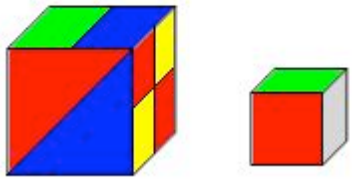

figure 6 *: deux constructions d'un cube*

Dans un premier temps, les avis sont très partagés notamment entre les deux auteurs des constructions. De toute évidence, les objets sensibles sont différents. Afin de faire avancer le débat, le professeur choisi alors de rappeler l'énoncé d'une des propriétés d'un polyèdre régulier. On demande ainsi aux élèves de prendre appui sur une définition qui relève du champ théorique alors que le désaccord portait sur des objets sensibles. Chaque solide construit est donc revisité à ce moment là, par la vérification point par point des conditions énoncées. C'est ainsi que l'on valide le fait que chacun de ces objets correspond au concept de polyèdre régulier. Les élèves utilisent alors le mot "pièce" pour différencier l'objet réel de sa dénomination "face" en langage géométrique. Ainsi l'accord dans le groupe est trouvé et l'on s'entend pour admettre que les deux solides ne représentent qu'un même objet géométrique certes constitué de pièces différentes.

L'introduction par le professeur de la définition du polyèdre régulier dans le milieu de la situation oblige les élèves à faire un aller et retour de l'objet sensible vers l'objet géométrique. Cette expérience permet d'avancer dans l'argumentation nécessaire à la résolution du problème posé. On remarque ici que la résolution du problème posé naît des deux allers retours entre les objets sensibles construits, par les objets mathématiques représentés par leurs propriétés.

Du point de vue de la dialectique objet sensible objet théorique

Lors de la séance de recherche avec le groupe des sixièmes, les élèves ont réalisé un nombre assez important de solides sans réellement interagir pendant cette phase d'action dédiée à la construction. Vient ensuite un temps de mise en commun sollicité par le professeur qui choisit une fois encore de relire la définition du polyèdre régulier telle qu'elle est présente dans l'énoncé de l'énigme. Chaque solide est confronté aux conditions imposées afin d'être on non validé comme réponse au problème posé. Après quelques discussions consensuelles, vient le cas d'un solide plus problématique (figure 7) : il est constitué de 6 faces identiques qui sont toutes des triangles isocèles.

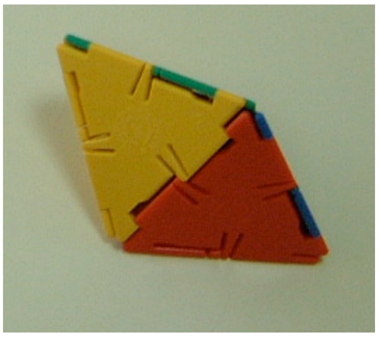

***figure** 7 : une construction problématique*

L'ensemble des élèves du groupe pense d'emblée que ce solide est une réponse correcte à l'énigme du fait de sa constitution avec des faces identiques et régulières. Cependant l'un des élèves du groupe surprend ses camarades en déclarant :

"C'est pas un dé du sorcier (comprendre un polyèdre régulier) parce que le cercle y peut pas rentrer dedans, c'est pas régulier".

Il prend alors le solide dans ses mains et tente de figurer par des gestes un cercle passant par les deux sommets extrêmes du solide. Il montre ensuite les autres sommets et déclare que ces derniers "ça va pas toucher le cercle". Il y a là une référence à une propriété des polygones réguliers (tous inscriptibles dans un cercle), donc à la géométrie plane qui peut s'expliquer par le fait que des constructions ont été réalisées sur l'ordinateur quelques jours auparavant. Le professeur avait fait expérimenter le logiciel Cabri-Géomètre et notamment la fonction polygone régulier qui témoigne assez radicalement de la propriété d'inscription dans le cercle de tout polygone régulier, et par là même de leur nombre infini. L'appel à cette connaissance à partir de la construction dans l'espace est surprenant car il relève d'un transfert plutôt inattendu dans ce contexte d'enseignement. Cependant, cette remarque d'abord déstabilisante pour le groupe, est ensuite prise en considération puis validée grâce à l'explication donnée : les gestes pour l'espace sensible et les mots pour le registre langagier. Le professeur intervient alors pour demander aux élèves de bien regarder le nombre de faces à chaque sommet du solide construit. Cette fois il n'y a plus de doute, le solide n'est pas validé.

La dimension expérimentale qui se traduit par les allers et retours entre l'objet sensible et l'objet géométrique est une nouvelle fois mise en évidence dans cet extrait. On voit comment les propriétés d'un objet géométrique peuvent rencontrer un réel résistant qui, grâce à son statut problématique renforce l'utilisation d'arguments théoriques pour enclencher le processus de validation.

Conclusion

L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire répond à une commande institutionnelle préconisant une démarche permettant un passage progressif d'une géométrie de type expérimental à une géométrie plus théorique. Selon nous, ce projet éducatif s'inspire fortement d'une axiomatisation de type euclidienne, processus qui naît d'une phase d'observation et de mesure du monde sensible; qui fait une place non négligeable à l'intuition avant d'intégrer les propriétés des objets déterminés au sein d'un système déductif comme débarrassé des impuretés du réel.

Dans ce cours, nous souhaitions proposer un autre modèle pour l'enseignement des savoirs géométriques en contexte scolaire, celui d'une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques qui souligne d'avantage les allers et retours entre le réel et le pensé. Nous pensons notamment avoir montré comment la prise en compte de la dimension expérimentale intrinsèque des mathématiques devait servir dans la conception du milieu pour l'apprentissage par le professeur. Nous pensons que les éléments du milieu de la situation d'apprentissage sont déterminants pour la construction des connaissances dans un contexte d'enseignement spécifique comme celui qui est présenté, et que les données recueillies sont transférables à d'autres environnements.

Le milieu de type laboratoire que nous commençons à cerner dans nos recherches est étudié dans le cadre géométrique du fait de la forte dimension culturelle de ce domaine des mathématiques. Cependant, nous faisons la conjecture que la dimension expérimentale des mathématiques dont nous avons montré la consistance épistémologique, peut s'exprimer dans d'autres registres (numérique, algébrique). C'est ce que nous essaierons de montrer dans le cadre d'un projet de développement de laboratoires de mathématiques au sein de différentes structures et dispositifs de l'enseignement spécialisé aux niveaux primaire et secondaire de l'enseignement.

Dans ce cours, nous avons aussi souhaité rendre compte de nos recherches en cours dans le contexte de l'enseignement spécialisé concernant la problématique des objets mathématiques en situation d'apprentissage, de leur lien avec la réalité; et de la dialectique sensible/théorique les concernant. Nous faisons l'hypothèse que c'est la géométrie qui pose le mieux la question du rapport entre les mathématiques et la réalité, car elle établit un lien immédiat entre un monde sensible au départ physique et l'abstraction mathématique qui tente de l'appréhender, le codifier, et d'intervenir sur lui.

> "On propose demande comment la géométrie s'illustre ainsi dans la nature : et non pas pourquoi cela est. On recherche en quoi le fait consiste, non les raisons qui le rendent possible ou nécessaire. L'analyse, en effet, doit précéder l'explication : elle est toujours possible, alors que l'explication de l'est pas toujours." (Nicod, 1962)

Si nous rejoignons Bkouche (Bkouche, 2006) qui considère comme nous l'avons fait (Dias, Durand Guerrier, 2005) la géométrie comme une science expérimentale, il est nécessaire d'aller plus avant désormais sur les conditions qui permettent des phases expérimentales dans la construction des connaissances. Il n'est pas suffisant de dire que les objets de la géométrie proviennent du monde sensible pour caractériser la dimension expérimentale des mathématiques. Nous souhaitons pour cela continuer notre investigation hors du strict champ de la géométrie, afin d'observer et d'analyser comment les savoirs mathématiques parviennent à la connaissance des élèves lors de leur scolarité.

REFERENCES

Bloch, I. (2001) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage

Borel, E. (1904) *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*, conférence prononcée le 3 mars 1904 au Musée pédagogique

Bkouche, R. (2006) La géométrie entre mathématiques et sciences physiques, in *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics Mathematics*

Bruner, J.-S. (1983) Le rôle des interactions de tutelle dans la résolution de problèmes, in *Le développement de l'enfant savoir faire savoir dire*, Paris, PUF, pp 261-280

Châtelet, G. (1993) *Les enjeux du mobile*, Mathématiques, physique, philosophie, éditions du Seuil

Conne, F. & al. (2004) L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence

Conne, F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal

Conne, F. (à paraître) L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherche en didactique des mathématiques*

Desanti J.-T. (1968) *Les idéalités mathématiques*, Paris, Le Seuil

Dias, T. ; Durand-Guerrier, V. (2005) Expérimenter pour apprendre, *Repères IREM* **60**, 61-78

Dias, T. ; Durand-Guerrier, V. (2005) L'interprétation des énoncés en mathématiques. Un exemple en géométrie des solides, communication du symposium La sémantique logique comme concept organisateur pour un questionnement épistémologique des disciplines scolaires, à paraître in Actes du colloque : Quelles références épistémologiques pour les didactiques, Bordeaux.

Durand-Guerrier, V. ; Heraud J.L. (2006), Définition et règle, le mythe de la transparence en géométrie, in Interactions verbales, didactiques et apprentissage, Presses Universitaires de Franche-Comté, 139-167

Gardies, J.-L. (2004) *Du mode d'existence des objets de la mathématique*, Vrin

Gonseth, F. (1974) Les mathématiques et la réalité, Albert Blanchard

Granger, G.-G. (1999) *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, Sciences

Hacking I. (2006) Cours donnés au collège de France

Le Berre, G. (2006) *L'évasion des polyèdres*, Mathématières

Lelong, P. (2004) Le réel et les concepts en mathématique : une stratégie de création, in *Le réel en mathématiques*, Psychanalyse et mathématiques, ALGAMA éditeur, diffusion Le Seuil, pp

Mercier, A. ; Sensevy, G. (1999) Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ? , in *Le Télémaque* **15** - Enseigner les sciences

Nicod, J. (1923) *La géométrie dans le monde sensible*, réédition, PUF, 1992

Petitot, J. (1991) *Idéalités mathématiques et réalité objective*, Approche transcendantale, Séminaire d'Epistémologie des Mathématiques, Hommage à Jean-Toussaint Desanti, (G. Granel ed.), pp. 213-282, Editions TER, Mauvezin

Pedrizet, P. (1931) *Le jeu Alexandrin de l'icosaèdre*, Bulletin de l'institut français de l'archéologie orientale

Sinaceur, H. (1993) La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth, in *La figure et l'espace*, actes du 8ème colloque INTER-IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Lyon, pp.187-207

Tarski, A. (1944) La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 2 : 265-305. Armand Colin, 1972.

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*, Paris-Louvain

Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'éducation nationale / sous la direction de Jean-Pierre Kahane ; O.Jacob/Centre National de Documentation Pédagogique, Paris 2002

J.O n° 36 du 12 février 2005 page 2353 Loi ordinaire 2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées