NOUVELLES PERSPECTIVES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES

XXIe école d'été de didactique des mathématiques

SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021

Volume des séminaires et posters

Coordonné par
Fabrice Vandebrouck et Marie-Line Gardes

Avec la participation des membres du CSO
Lalina Coulange
Fabien Emprin
Sébastien Jolivet
Rahim Kouki
Cécile Ouvrier-Buffet
Sara Presutti
Avenilde Romo
Laurent Vivier

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Paris Cité

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
https://irem.u-paris.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris Cité, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Cité
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

https://irem.u-paris.fr/ressources-en-ligne-de-lirem-de-paris-documents-videos-liens

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

NOUVELLES PERSPECTIVES
EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES

XXIe école d'été de didactique des mathématiques
SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021

Volume des séminaires et posters

Coordonné par
Fabrice Vandebrouck et Marie-Line Gardes

Avec la participation des membres du CSO
Lalina Coulange
Fabien Emprin
Sébastien Jolivet
Rahim Kouki
Cécile Ouvrier-Buffet
Sara Presutti
Avenilde Romo
Laurent Vivier

TROUBLES DES APPRENTISSAGES ET DIFFICULTÉS SÉVÈRES EN EARLY ALGEBRA

Francesca Gregorio*

RÉSUMÉ
Le but de cette recherche est d'étudier le comportement des élèves avec MLD (*Mathematical Learning Disability*, acronyme désignant des troubles des apprentissages en mathématiques ou des difficultés sévères en mathématiques) face à des tâches d'*early algebra*. Dans ce texte, nous visons à donner de premières pistes de réponses à la question de recherche suivante : quel est le rôle des exemples dans la preuve pour des élèves avec MLD ? En utilisant la typologie des preuves de Balacheff (1987), différents types d'exemples sont identifiés : empirisme naïf, expérience cruciale, exemple pour détecter une régularité et exemple générique. Ces exemples peuvent permettre l'observation de la pensée algébrique chez les élèves avec MLD et soutenir la présence de la pensée algébrique dans cette population.

Mots-clefs : pensée algébrique, *early algebra*, troubles des apprentissages, difficultés sévères, MLD.

ABSTRACT
Recent years have seen a growing interest in research on students with learning difficulties in mathematics (MLD, Mathematical Learning Disability) in early algebra tasks. In this paper, we aim to provide some initial answers to the following research question: what is the role of examples in proof for students with MLD? Using Balacheff's (1987) typology of proofs, different types of examples are identified: naive empiricism, crucial experience, example to detect a regularity and generic example. These examples may allow the observation of algebraic thinking of students with MLD and support the presence of algebraic thinking in this population.

Keywords: algebraic thinking, early algebra, mathematical learning disorders, learning difficulties, MLD.

Les dernières années sont marquées par un intérêt croissant de la recherche vers ce qu'on appelle les troubles des apprentissages. Ce sujet de recherche a été abordé surtout avec un point de vue des sciences cognitives et une entrée par les objets mathématiques semble être absente pour l'instant : la didactique peut enrichir la recherche dans ce champ, avec un apport orthogonal aux recherches existantes.

Nous nous intéressons aux élèves avec des troubles des apprentissages en mathématiques (MLD, *Mathematical Learning Disability)*, des difficultés sévères et/ou persistantes en mathématiques. L'acronyme MLD est défini en didactique des mathématiques (Deruaz et al., 2020) comme incluant trois catégories d'élèves. Il peut faire référence à des élèves chez qui un trouble de l'apprentissage spécifique aux mathématiques a été diagnostiqué au moyen d'un test standardisé (qui dans les pays européens est généralement effectué par un professionnel de la santé). Le même terme peut être utilisé pour désigner les élèves chez qui l'on a diagnostiqué un autre trouble de l'apprentissage, non spécifique aux mathématiques, mais qui peut avoir un impact sur leur apprentissage des mathématiques (par exemple, la dyslexie ou la dyspraxie). MLD est également utilisé pour désigner les élèves qui ont des difficultés sévères et persistantes en mathématiques sans jamais avoir été diagnostiqués. Cette dernière catégorie est désignée par des tests non standardisés ou par l'évaluation des enseignants. Cette entrée par les élèves en difficulté permet non seulement d'étudier cette population particulière, mais aussi d'avoir un effet loupe sur les difficultés rencontrées par les élèves sans MLD, en s'avérant être un sujet de recherche riche.

Mis à part quelques exceptions, par exemple en géométrie pour des élèves dyspraxiques (Petitfour, 2018), les études existantes à ce sujet concernent quasi exclusivement

* Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France & HEP Vaud, Lausanne, Switzerland

l'arithmétique de base (Lewis & Fisher, 2016). Avec l'objectif d'approfondir les premières recherches à propos de l'algèbre (Watt et al., 2016), nous nous sommes intéressées aux élèves avec MLD, au sens de Deruaz et al. (2020) décrit dans le paragraphe précédent, en *early algebra*, une métadiscipline qui peut utiliser des tâches arithmétiques pour mettre en évidence des processus algébriques et qui permet de faire le pont avec les recherches existantes sur les MLD (Malara & Navarra, 2018).

CADRE THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

L'objectif de cette recherche est donc de comprendre quelles compétences et quelles difficultés ont les élèves avec MLD en *early algebra*. En particulier, nous voulons répondre à la question de recherche suivante :

QR Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique des élèves en grande difficulté en mathématiques ?

Nous faisons l'hypothèse de recherche que les élèves avec MLD peuvent développer des compétences en *early algebra*. De surcroît, nous faisons une deuxième hypothèse : la nature des difficultés est la même pour les élèves avec MLD et sans MLD. Ce qui différencie les deux populations est la persistance des difficultés qui caractérise les élèves avec MLD.

Pour répondre à notre question de recherche, nous nous sommes servie des outils théoriques venant de plusieurs cadres : les types de généralisation de Radford (2012), les types de preuve de Balacheff (1987) et les *language constructs* de Malara et Navarra (2018). Ce différents cadres nous permettent de mieux articuler la question de recherche en trois sous-questions :

QR1 Quelle est la place de la généralisation dans la pensée algébrique des élèves avec MLD ?

QR2 Quel est le rôle des exemples dans la preuve pour des élèves avec MLD ?

QR3 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique des élèves avec MLD ?

Les trois cadres théoriques utilisés sont complémentaires et s'avèrent être nécessaires pour étudier des aspects différents de la pensée algébrique des élèves. Le cadre de Radford offre des outils idéaux pour explorer la généralisation, qui est un des éléments principaux de la pensée algébrique[1]. La typologie de preuve de Balacheff se prête bien à étudier des tâches où les élèves peuvent prouver leur point de vue selon différents types de justifications[2]. En effet, l'argumentation et la preuve sont des aspects centraux pour la pensée algébrique. Dans le troisième cadre, Malara et Navarra identifient des structures langagières qui témoignent de la présence de la pensée algébrique. Cela fournit des instruments d'analyse adaptés à un large panel de tâches et permet d'identifier la pensée algébrique outre la généralisation et la preuve.

Faute d'espace, nous choisissons pour ce texte de nous concentrer sur la question de recherche QR2 en ne présentant ainsi que le cadre de Balacheff (1987). Le chercheur identifie une typologie des preuves (définie comme une explication acceptée à un moment donné par une certaine communauté) :

1. L'*empirisme naïf* se produit lorsque la validité d'une affirmation est prouvée à partir d'un ou d'un petit nombre de cas.
2. L'*expérience cruciale* prouve une proposition en présentant un exemple que l'élève reconnaît comme étant aussi peu spécifique que possible. Si la proposition est vraie dans ce cas, alors elle doit nécessairement être toujours vraie.

[1] En figure 1, un exemple de tâche qui travaille la généralisation.
[2] En figure 2, un exemple de tâche qui travaille la preuve.

3. L'*exemple générique* consiste à prouver la validité d'une proposition en opérant sur un cas particulier, mais s'appuyant sur des propriétés et la structure qui caractérisent la famille que ce cas particulier représente.
4. L'*expérience cruciale* permet de prouver en internalisant l'action et en la détachant de sa concrétisation sur un cas particulier. En restant liée à la temporalité anecdotique, elle abandonne le traitement d'un cas particulier, comme c'était le cas pour l'exemple générique.

Cette typologie n'est pas un ensemble d'étapes successives que les élèves doivent atteindre dans un ordre donné ou un outil permettant d'attribuer à chaque élève un niveau cognitif. Il s'agit simplement d'un outil permettant de décrire les actions des élèves dans un certain contexte dans une certaine tâche mathématique.

Nous avons ainsi construit une batterie de tâches pour favoriser l'émergence de la pensée algébrique des élèves. Les figures 1 et 2 montrent deux exemples de tâches proposées pendant notre expérimentation. Ensuite, nous les avons fait passer à 19 élèves entre 12 et 15 ans avec ou sans MLD lors de quatre entretiens cliniques. Les entretiens ont été transcrits et analysés grâce aux outils théoriques présentés ci-dessus.

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés ? Et de 5 carrés ?

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles Si oui, comment ?

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

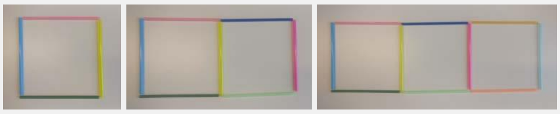

Figure 1. *– La suite de carrés : exemple de tâche proposée pendant les entretiens cliniques aux élèves.*

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

Figure 2. *– Nombres pairs et impairs : exemple de tâche proposée pendant les entretiens cliniques aux élèves.*

ANALYSE ET RÉSULTATS

Les entretiens ont été analysés en choisissant comme unité d'analyse les interventions orales et écrites des élèves lors de la résolution des tâches proposées. Pour ce texte, nous présentons l'analyse de la tâche « Nombres pairs et impairs » (figure 2) effectuée sur la base de la typologie des preuves (Balacheff, 1987) décrite dans la section précédente. Nous nous sommes particulièrement concentrées sur l'utilisation des exemples dans la pensée algébrique, avec le but de répondre à QR2.

Nous avons pu identifier différents types d'exemples créés par les élèves et utilisés pour résoudre la tâche. Les élèves peuvent recourir à l'empirisme naïf pour leurs exemples quand ils les produisent juste après avoir commencé à travailler sur la tâche. Il s'agit du premier exemple donné et permet de commencer à aborder le problème qui, autrement, resterait inaccessible. Par exemple, un élève interviewé a commencé la tâche en figure 2 en disant : « Oui... pair... On peut... Si on fait 3 plus 3 ça fait 6. »

Après le premier exemple, les élèves donnent d'autres exemples, puis d'autres exemples, jusqu'à ce que la généralité soit prise en considération et évoquée explicitement. Les élèves font dans ce cas recours à l'expérience cruciale. Par exemple, un des élèves a ainsi poursuit son raisonnement après l'empirisme naïf[3] : « Ba, si on met 12 plus 12 ça fait 24 et si on me 14 plus 14 ça fait 28 et c'est tout le temps pair, sinon 4 plus 4 ça fait 8, 6 plus 6 ça fait 12, 8 plus 8 ça fait 16, c'est tout le temps pair. » Cette liste d'exemples garantit la prise en compte de la généralité de l'affirmation par l'élève.

Cette itération d'exemples amène l'étudiant à repérer la régularité de la situation et à comprendre que cette régularité a une motivation qui peut être identifiée, comprise et généralisée : « Par exemple 3 plus 3 ça fait 6. 3 plus 7 ça fait 10. 3 plus 11 ça fait 14. En soi oui, je pense que ça sera toujours comme ça, c'est qu'il y a quelque chose de logique derrière. »

Les exemples peuvent également être utilisés pour généraliser la régularité par moyen d'un exemple générique (figure 3) : « 7 plus 7, 14, qui se divise aussi par 2. Ba, oui, parce que du coup, à chaque fois qu'on fait un nombre impair plus un autre nombre impair, le même (en indiquant 7 sur son exemple), ça donne ce chiffre (en indiquant 14) et ce chiffre, il est pair parce que du coup, à chaque fois, on peut le diviser par 2 pour que ça donne 7... Fin, pour que ça donne le... (en indiquant 7). » Dans ce cas, l'exemple (7+7=14) n'est pas traité dans sa particularité, mais comme représentatif d'une certaine famille d'objets (en additionnant deux fois le même nombre impair, on obtient un nombre pair).

Figure 3. *– L'écriture qui accompagne l'exemple générique.*

Les extraits d'entretiens présentés ci-dessus montrent que les élèves avec MLD peuvent manifester une pensée algébrique. Il s'agit d'un premier résultat important, car l'algèbre est retenue, dans certains contextes, un domaine mathématique difficile et n'est pas toujours proposée aux élèves avec MLD. Les exemples permettent aux élèves avec MLD d'exprimer cette pensée algébrique et de la déclencher.

RÉFÉRENCES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147–176. https://doi.org/10.1007/bf00314724

DERUAZ, M., DIAS, T., GARDES, M.-L., GREGORIO, F., OUVRIER-BUFFET, C., PETEERS, F., & ROBOTTI, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *The Journal of Mathematical Behavior, 60*, 1–17. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807

LEWIS, K. E., & FISHER, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(4), 338–371. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338

MALARA, N. A., & NAVARRA, G. (2018). New Words and Concepts for Early Algebra Teaching: Sharing with Teachers Epistemological Issues in Early Algebra to Develop Students' Early Algebraic Thinking. In C. Kieran (Eds.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (p. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

PETITFOUR, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N, 101*, 45-70. https://doi.org/10.4000/ree.6794

RADFORD, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In S. J. Cho (Ed.), *ICME-12 Regular Lecture* (pp. 675–694). Seoul, South Korea: Seoul National University.

WATT, S. J., WATKINS, J. R., & ABBITT, J. (2016). Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities: Where Have We Come and Where Should We Go? *Journal of Learning Disabilities*, *49*(4), 437–447. https://doi.org/10.1177/0022219414564220

[3] L'élève est ici en train de répondre à la relance de la chercheuse « et en additionnant deux nombres pairs ? » Cette relance et d'autres similaires étaient proposées si les élèves étaient bloqués dans leur raisonnement.

TITRE :

Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques - Textes des séminaires et posters

COORDINATION :

Fabrice Vandebrouck & Marie Line Gardes

RÉSUMÉ :

Cette brochure constitue le volume des actes des séminaires et posters de la 21ème école d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue du 18 au 24 octobre 2021 à Sainte Marie de Ré. L'école d'été est un lieu important de constitution de la communauté des didacticiens des mathématiques et de la définition de son activité. Elle offre aux participants une possibilité d'intervenir à différents niveaux (TD, séminaires, posters). Dans ce volume sont regroupés les textes des 19 séminaires et 9 posters qui ont été présentés à l'école 2021.

Le document est destiné aux chercheurs en didactique des mathématiques, pour lesquels il constitue un outil de travail. Il permet d'étudier (ou du moins de commencer l'étude) de travaux innovants produits par des collègues. Cela peut également contribuer à l'ouverture de nouveaux terrains ou de nouvelles questions de recherche.

MOTS- CLÉS :

Didactique des Mathématiques

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: C.Hache
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Cité
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
https://irem.u-paris.fr/

Dépôt légal : 2023
ISBN : 978-2-86612-404-5