CONNAISSANCES MATHEMATIQUES DES ENSEIGNANTS ET ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHME DE LA MULTIPLICATION

Stéphane CLIVAZ*

Résumé – Afin de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques, quatre enseignants ont été observés durant leur enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Les séquences sont analysées à l'aide de trois cadres : les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement, les critères de pertinence mathématique du professeur et la structuration du milieu. Les résultats sont considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focalisent ensuite sur un grain d'analyse plus fin. Ils font apparaître des liens entre connaissances mathématiques, pertinence et choix didactiques des enseignants.

Mots-clefs : connaissances mathématiques, enseignant, enseignement primaire, algorithme de la multiplication, pertinence

Abstract – In order to describe the influence of primary school teachers' mathematical knowledge on their didactical management of classroom mathematical tasks, four teachers have been observed while teaching multidigit multiplication algorithm. The sequences were analyzed using three frames: categories of mathematical knowledge for teaching, the criteria for mathematical pertinence of the teacher and the structure of the milieu. The results are taken into account from a general perspective and then focused on a finer grained analysis. The analysis shows the links between mathematical knowledge, pertinence and teachers' didactical choices.

Keywords: mathematical knowledge, teacher, elementary teaching, multidigit multiplication, pertinence

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici est une partie d'une recherche doctorale visant à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques (Clivaz 2011).

Au cours des dernières années, les recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ont pris de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Bednarz et Proulx 2009). Ce mouvement s'observe également dans le monde francophone, toutefois plus au Québec qu'en Europe. L'existence d'un groupe de travail lors d'EMF 2009 et d'EMF 2012 est une manifestation supplémentaire de cet essor.

Si de nombreuses recherches, en particulier étatsuniennes, tentent d'établir un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et les performances des élèves, les résultats sont souvent mitigés, voire contradictoires. De plus, même quand un effet est mesuré, les mécanismes permettant de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement restent mystérieux (Hill, Rowan et Ball 2005, p. 401).

Le cadre théorique de notre recherche s'appuie sur les *catégories de connaissances mathématiques* (Ball, Thames et Phelps 2008), sur les critères de *pertinence mathématique du professeur* élaborés par Bloch (2009) et sur la *structuration du milieu* et sa déclinaison en *niveaux d'activité du professeur* (Margolinas 2002). L'analyse portera sur l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres dans des classes de 4ème primaire[1] du canton de Vaud (Suisse). Les résultats seront considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focaliseront ensuite sur un grain d'analyse plus fin.

* HEP Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

[1] CM1 français, élèves de 10 ans

© Clivaz S. (2012) Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 172–182). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

1. Les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement

Ball, Thames et Phelps (2008) proposent de classifier les différentes *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (CME) selon le découpage suivant :

Connaissances du sujet :

– Connaissances mathématiques communes (CMC)
– Connaissance de l'horizon mathématique (CHM)
– Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)

Connaissances pédagogiques du contenu :

– Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet (CC)
– Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet (CE)
– Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (CP)[2]. (p. 403)

Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill et Bass 2005, pp.17–21). Ces CMS se distinguent des CMC, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking[3]. (Op. cité, p.21)

2. La pertinence mathématique

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

> C_1 : […] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique
>
> C_2 : […] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques
>
> C_3 : […] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (Op. cité, p.33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

---

[2] Ma traduction des termes de (Ball *et al.*, 2008).

[3] « Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. […] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique ». L'italique est de Ball, la traduction est la mienne.

3. La structuration du milieu

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M_{+3}: M-Construction		P_{+3}: P-Noosphérien	S_{+3}: Situation noosphérienne
M_{+2}: M-Projet		P_{+2}: P-Constructeur	S_{+2}: Sit. de construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif	P_{+1}: P-Projeteur	S_{+1}: Sit. de projet
M_0: M-Apprentissage	**E_0: Elève**	**P_0: Professeur**	**S_0: Situation didactique**
M_{-1}: M-Référence	E_{-1}: E-Apprenant	P_{-1}: P-Observateur	S_{-1}: Sit. d'apprentissage
M_{-2}: M-Objectif	E_{-2}: E-Agissant		S_{-2}: Sit. de référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3}: Sit. objective

Tableau 1 *– Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)*

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas 1995, p. 96), et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas 2004, p. 75).

4. Questions de recherche

Ces trois éléments de cadrage théorique nous permettent de poser plus précisément la question de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement : quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants primaires ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

III. CORPUS DE DONNEES ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Afin de répondre à ces questions, nous avons choisi d'observer l'enseignement de l'algorithme de la multiplication. Il s'agit d'un sujet familier permettant particulièrement de mettre en évidence la distinction entre Connaissances Mathématiques Communes et Connaissances Mathématiques Spécifiques et offrant à l'enseignant des choix d'enseignement orientés plutôt vers l'application de procédures ou plutôt vers la compréhension de concepts mathématiques (Ball *et al.* 2005, pp.17–20, Meno 2003, p.1).

Nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4$^{\text{ème}}$ primaire : Andrea, Camille, Dominique et Sacha. Le nombre de séances varie entre deux et neuf. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » (Comiti, Grenier et Margolinas 1995, pp.98–99), c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivie d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht et Woods 2002–2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Les corrélations entre CME, niveaux d'activité et pertinence ont été mises en évidence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un *synopsis* (Schneuwly, Dolz et Ronveaux 2006) et d'une *macrostructure* (Dolz et Toulou 2008). Le moment d'explication de l'algorithme et les choix d'activités des quatre enseignants ont été comparés en fonction de leur connaissance mathématique de l'algorithme. Ce moment d'explication de l'algorithme, mais aussi les explications faisant suite à des difficultés d'élèves, ont été transcrits et analysés avec un grain plus fin.

IV. ANALYSE ET RESULTATS

L'ensemble des données recueillies a été analysé à trois échelles. Le niveau macro analyse l'ensemble des données (1). Un niveau intermédiaire examine le moment d'explication de l'algorithme (2 à 6) et le niveau micro permet l'analyse fine d'un épisode (voir Clivaz, A paraître).

1. Ensemble des données récoltées et combinaisons de catégories

Plus de 17 heures de séances et 11h30 d'entretiens ont été traitées. Environ 80% des données ont fait l'objet d'un découpage en près de 800 épisodes et ont été codées selon le niveau d'activité de l'enseignant, selon les catégories de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement présentes et selon la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Celles non codées des séances de classe sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe.

Les niveaux d'activité les plus présents dans les entretiens sont les niveaux P_{+2} et P_{+3}. Cette constatation correspond bien à la visée de l'entretien qui était de recueillir, avant et après la séquence, des éléments généraux sur celle-ci.

Pour les parties en classe, le niveau très nettement le plus présent est celui de la situation didactique P_{+0}. Les positions P_{+3} et P_{+2} sont très rarement observables, en revanche un certain nombre d'interventions de l'enseignant au niveau +1 du projet de leçon ont été observées. On peut encore noter que le niveau P_{-1} est assez peu présent. Ceci peut être noté à propos des entretiens durant lesquels les enseignants parlent peu de ce qu'ils vont ou ont observé ou de la manière dont ils vont ou ont effectué la dévolution du problème, mais aussi en classe où les moments durant lesquels l'enseignant observe ou dévolue sans proposer de connaissances sont relativement rares.

Les catégories de connaissances mathématiques ont été attribuées à la quasi totalité des clips déterminés en classe et en entretien. Seuls 7% des épisodes n'ont pas pu se voir déterminer une catégorie de connaissance mathématique. Il s'agit essentiellement de moments d'observation, de moments de gestion de classe avec interactions didactiques (lecture de consigne par exemple) ou de déclarations relativement générales durant les entretiens pour lesquels il n'était pas possible de déterminer, même en questionnant l'enseignant, quel type de connaissance ces déclarations mettaient en jeu. Selon les niveaux d'activités de l'enseignant, les types de connaissances mathématiques sont assez uniformément répartis. On note tout au plus que les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME) de type pédagogique sont plus présentes aux niveaux +3 et +2 alors que les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) y sont rares. Les Connaissances Mathématiques Spécifiques (CMS) ne se distinguent en revanche pas des autres types de CME du point de vue de la fréquence de leur manifestation aux divers niveaux d'activité du professeur.

Une première analyse statistique permet de mettre en évidence des corrélations entre la présence des diverses catégories de CME et la pertinence des interventions de l'enseignant. En particulier une corrélation forte apparaît entre la présence dans un épisode d'une Connaissance Mathématique Spécifique correcte et la manifestation de la pertinence mathématique. Ce lien n'existe en revanche pas pour les autres types de CME. En particulier, d'un point de vue statistique, les Connaissances Mathématiques Communes correctes ne sont liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une Connaissance Mathématique Commune correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une Connaissance Mathématique Spécifique erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cela suggère que les Connaissances Mathématiques Communes ne génèrent de la pertinence mathématique que quand elles sont liées à d'autres CME.

2. *Le moment d'explication de l'algorithme*

Les quatre séquences observées comportent toutes un moment bien défini d'explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Ce moment est délimité par le choix d'une multiplication à effectuer et par l'annonce de l'enseignant qu'il va montrer ou expliquer la multiplication en colonnes à deux chiffres. Il est caractérisé par une forme de cours dialogué dans lequel l'enseignant décrit les étapes de l'algorithme en posant au groupe classe des questions, et en faisant effectuer les étapes de calcul aux élèves. Il s'achève par le choix d'une nouvelle multiplication à effectuer. Chez les quatre enseignants, ce nouvel exemple ressemble très fortement au premier du point de vue du choix des nombres et il est effectué par un ou plusieurs élèves selon un mode proche de celui utilisé précédemment (tableau noir ou affiche).

Nous allons observer quatre aspects de ce moment d'explication chez les enseignants. La séparation en deux lignes puis l'addition et le lien avec la distributivité chez Camille (3) ; l'alignement, la gestion des retenues et le lien avec la numération décimale de position chez Sacha (4) ; le zéro de la seconde ligne chez Dominique (5) et enfin les représentations de la multiplication chez les quatre enseignants (6).

3. *La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité*

La présentation aux élèves de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres comporte un « acte » durant lequel l'enseignant dit, montre ou explique qu'il faut *séparer le calcul en deux*, un moment où il *ramène chaque calcul à une multiplication à un chiffre*, et un moment où il *additionne les deux lignes*. Ces trois éléments découlent de la numération décimale de position et surtout de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Aux niveaux P_{+2} et P_{+1}, Camille a décidé de « montrer l'algorithme de la multiplication » par un nombre à deux chiffres de manière « expéditive », sans préparation particulière autre que la révision de l'algorithme à un chiffre. Effectivement, elle démarre directement en posant la multiplication de 2417 par 25. Elle cache immédiatement le 2 de 25 à l'aide d'un morceau de papier :

> Camille : Alors, attention les vélos, regardez bien ce que je vais faire. (Camille pose un cache sur le 2 du second terme). Je cache le 2. Et ce qui nous reste là, c'est ?
> Elève : 5
> Camille : Ouais, c'est une multiplication ?
> Elève : A un chiffre
> Camille : Par 5, comment?
> Elève : A un chiffre
> Camille : A un chiffre, comme vous venez de faire. Alors on va voir, normalement vous devez la maîtriser.

Camille ne donne aucune autre explication ou justification de la première ligne. Arrivée au bout de celle-ci, elle enlève le cache et demande aux élèves comment ils pensent que l'on va continuer : « Formulez des hypothèses. Si c'est pas les bonnes, c'est pas grave ». Ces deux interventions sont non-pertinentes car l'interaction n'est pas au plan mathématique (critère de pertinence C_1). Les effets de ce manque de pertinence mathématiques sont perceptibles dans les réponses des élèves qui se lancent dans un jeu de devinettes. Devant la diversité des réponses (pour la plupart incorrectes), Camille décrit la *règle du zéro* (voir 5). Elle effectue ensuite le calcul de la seconde ligne après avoir placé le cache sur le 5, toujours sans explication. L'addition finale est justifiée par le fait que « on n'a pas vraiment une réponse, là » et par le fait que plusieurs élèves avaient parlé d'une addition au moment des hypothèses à formuler. Là encore l'interaction est non-mathématique et donc, selon C_1, non-pertinente.

Un peu plus tard Camille donne un autre exemple, 583x35, et demande aux élèves d'expliquer chaque passage. Pour la première ligne, l'explication consiste à cacher le 3. Ce qui est à nouveau une intervention mathématiquement non pertinente. Puis, au moment de passer à la seconde ligne d'une multiplication, Camille demande aux élèves pourquoi il faut ajouter un zéro à la seconde ligne. Elle constate que les explications sont confuses et elle décompose le second terme et trace des flèches vers celui-ci (voir **Figure 1**), mais ce n'est pas pour justifier la séparation en deux lignes, mais bien pour dire qu'il s'agit de 30 et que c'est là la raison de l'ajout du zéro.

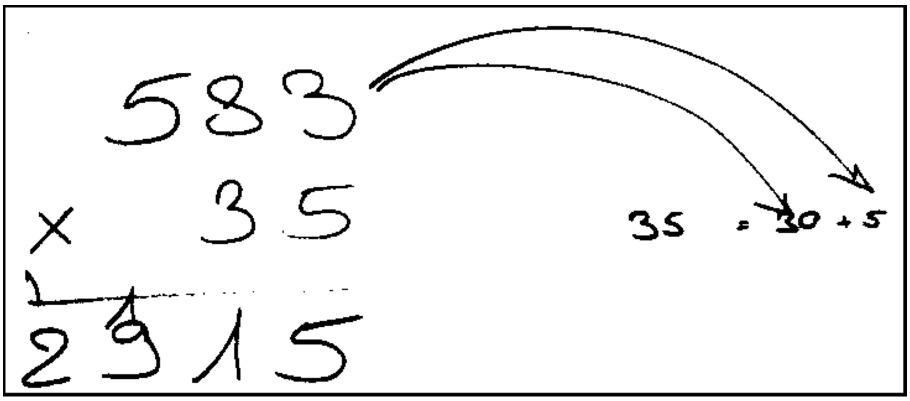

***Figure 1** – Camille, écriture de 35=30+5 et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.*

Au moment de passer à l'addition, Camille justifie qu'il faut additionner, « parce que c'est pas fini, on n'a pas une réponse, on a deux étages » et que cela ressemble à un calcul donné en devoir. Elle écrit :

$$24 \times 3 = (20 \times 3) + (4 \times 3) = 60 + 12 = 72$$

Figure 2 *– Camille, explication du fait qu'il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583x35.*

Camille ajoute ensuite que c'est la même chose et qu'il faut donc additionner.

La Connaissance Mathématique Commune de la distributivité est donc présente chez Camille. La Connaissance Mathématique Spécifique que constitue son lien avec l'algorithme de la multiplication est également disponible, mais l'utilisation de cette connaissance n'est pas pertinente pour au moins trois raisons. Tout d'abord la comparaison entre la multiplication 583x35 et 24x3 n'est pas utilisée à bon escient puisqu'il s'agit une fois de « distributivité à gauche » et l'autre fois de « distributivité à droite ». Ensuite cette explication ne vient qu'en appui d'une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un truc pour s'en souvenir. Enfin et surtout, même si le lien est fait, il l'est par référence à un calcul déjà effectué et donc pour les élèves, cela se traduit plus par « il faut faire comme dans l'exercice untel » que comme « l'algorithme en colonne revient à effectuer la même décomposition des opérations que le calcul réfléchi ». Autrement dit, là encore, l'interaction n'est pas au niveau mathématique.

4. *L'alignement et la gestion des retenues : le lien avec la numération décimale de position*

Les quatre enseignants observés présentent à leurs élèves quatre gestions des retenues différentes. Ils gèrent également de façon différenciée l'alignement et verbalisent ou non le lien avec la numération de position.

Lors de l'explication de l'algorithme, Sacha ne dessine pas de colonnes. En revanche, tant durant cette explication que lors des autres algorithmes de multiplication effectués de façon publique, elle désigne la place des chiffres en parlant de « la colonne de unités », ou de la « colonne des dizaines »… Pour ce qui est des retenues, elle choisit, contrairement à ce qui est recommandé dans Cap Math[4], de les noter directement sur la multiplication (et donc dans les colonnes adéquates), en utilisant la même couleur que celle employée pour écrire la ligne correspondante. Ce faisant, elle résout le problème du mélange tout en conservant les sens de la retenue. Ainsi, même si elle n'est pas verbalisée, la CMS des liens entre numération décimale de position, alignement et retenue est manifestée et correcte. De plus, par l'utilisation des couleurs, par une notation et un vocabulaire rigoureux, les interventions de Sacha se situent au plan mathématique et sont donc mathématiquement pertinentes selon le critère C_1.

5. *Le zéro de la seconde ligne*

Avant la séquence, au niveau P_{+2}, les quatre enseignants estimaient que le zéro de la seconde ligne constituerait la principale difficulté dans l'enseignement de l'algorithme. Tous ont donc prévu pour la leçon concernée, au niveau P_{+1}, une manière de traiter cette difficulté et l'ont utilisée au niveau P_0. Par ailleurs, tous ont affirmé qu'ils souhaitaient que les élèves

[4] Sacha est la seule enseignante à ne pas utiliser les manuels officiels romands COROME (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1999), mais Cap Math (Charnay, Combier, Dussuc, Madier et Madier, 2007). Ce dernier manuel demande de noter les retenues dans une « boîte à retenue » placée à côté de la multiplication et comportant une ligne d'en tête avec les lettre m, d, c et u et une ligne pour les retenues de chaque produit partiel.

comprennent ce zéro et tous ont appuyé leur explication sur la *règle du zéro* : « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ».

La raison donnée par Dominique pour placer le zéro de la seconde ligne est le fait qu'on travaille avec des dizaines, et que, lorsqu'on travaille avec des dizaines, on ajoute un zéro.

Dominique : C'est 1, ça?
Elève : 10
Dominique : C'est 10 ! Donc attention, quand on travaille avec les dizaines, qu'est-ce qu'on doit rajouter?
Elève : Un zéro.

Dominique s'appuie ici directement sur plusieurs rappels effectués, en particulier durant la leçon précédente, à propos de cette *règle du zéro*. Il avait à ce moment là dit sur plusieurs exemples, « quand on multiplie par 10, on ajoute un zéro ». La formulation devient ici « quand on travaille avec les dizaines ».

Cette formulation, dans ce contexte, est correcte du point de vue des CMC, pour autant qu'on ne la sorte pas de ce contexte et, en particulier, qu'on ne cherche pas à l'appliquer à d'autres moments dans l'algorithme. En effet, si on la prend au pied de la lettre, et c'est ce que font certains élèves, elle conduit à ajouter d'autres zéro à chaque fois que la multiplication concerne un chiffre des dizaines. En fait cette règle, dans le cadre de l'algorithme de la multiplication, est un raccourci de l'associativité de la multiplication et du caractère positionnel décimal du système de numération. Le problème est alors qu'un raccourci efficace, une connaissance encapsulée, ne permet pas une interaction mathématiquement pertinente. Autrement dit la CMS consistant à décortiquer une CMC n'est pas présente ici.

6. Les représentations de la multiplication

Comme illustré dans les exemples ci-dessus, les connaissances mathématiques spécifiques mises en évidence prennent fortement appui sur les ostensifs de la multiplication. Chez les quatre enseignants la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite par Davis et Simmt au Canada (2006, p. 299) ou par Amato (2004, 2005) au Brésil . Dans le cas de Sacha où cette représentation est en accord avec le manuel Cap Math utilisé, et où celui-ci construit les connaissances des élèves sur des bases mathématiques que l'on peut considérer comme adéquates, cela ne pose pas problème. En revanche, quand cet ostensif ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant, les CMS de l'enseignant apparaissent comme déficientes. De fait, la capacité à varier les points de vues, registres ou cadres est souvent considérée comme la compétence d'un expert. Ce que dit Robert (2008, p. 34) à propos des élèves peut être étendu à l'enseignant : « Un des enjeux de l'apprentissage est d'accéder à une certaine diversité des "représentations" des objets étudiés […], ainsi qu'à une certaine organisation des concepts entre eux permettant d'en acquérir une certaine disponibilité […] ».

Ce point rejoint encore deux des tâches d'enseignement liée aux CMS par l'équipe de Ball : « Recognizing what is involved in using a particular representation ; linking representations to underlying ideas and to other representations »[5] (Ball *et al.* 2008, p.400). Cette CMS fait défaut à propos de la multiplication chez Dominique, Camille et Andrea. L'observation n'a pas permis de savoir si sa manifestation chez Sacha était liée ou non à l'utilisation de Cap Maths.

[5] Etre conscient des implications de l'utilisation d'une représentation particulière ; faire les liens entre une représentation et le concept, entre plusieurs représentations d'un concept. Ma traduction.

L’unique représentation de la multiplication comme addition itérée peut aussi être la cause d’erreurs relevant des CMC. C’est le cas pour Camille qui affirme aux élèves qu’une multiplication agrandit toujours le résultat, alors qu’une division le rend plus petit. Lors de l’entretien *post,* l’enregistrement vidéo de ce moment a été montré à Camille qui n’a remarqué aucun problème. Interrogée plus précisément, elle dit que c’est vrai, « jusqu’en fin de quatrième » et que ça n’est faux que « quand il y a des virgules ». Elle continue d’ailleurs de penser qu’il faut dire aux élèves que multiplier, c’est agrandir et qu’on leur expliquera un jour qu’il y a des cas où cela n’est pas vrai. Cette erreur peut être liée à une représentation purement additive de la multiplication. Cette hypothèse est confirmée par la réaction de Camille lors de l’entretien *post* lorsque la représentation de la multiplication comme aire d’un rectangle lui est présentée : « J'ai jamais fait le lien! J'y ai jamais pensé ». Pourtant, dans la suite de l’entretien, Camille se souvient avoir fait des exercices liant aire et multiplication (La chasse aux rectangles, (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler 1998, p. 164)), mais en modifiant la donnée de telle sorte que l’exercice serve uniquement à noter les tables de multiplication. Cette erreur sur « la multiplication qui agrandit et la division qui rend plus petit » et son lien avec les représentations additives de la multiplication et partitive de la division a d’ailleurs été relevée par Tirosh et Graeber chez 11% (pour la multiplication) et 52% (pour la division) d’une population de 136 futurs enseignants primaires étatsuniens (Tirosh et Graeber, 1989). La CMS des différentes représentations de la multiplication est donc absente chez Camille et c’est cette absence qui rend possible une erreur mathématique ayant trait aux CMC.

V. CONCLUSION

L’observation de l’enseignement de l’algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres a permis, à un niveau global, de mettre en évidence une corrélation entre les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l’enseignement (CMS) et la pertinence mathématique des intervention de l’enseignant . Elle a également permis de voir que cette corrélation n’est valable pour les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) que si elles sont accompagnées d’autres Connaissances Mathématiques pour l’Enseignement (CME), en particulier de CMS. Les analyses à des niveaux de plus en plus fins ont donné des réalisations des liens entre CMS, CMC et pertinence. Ces illustrations montrent que, selon les cas, une CMS peut être liée à des interventions mathématiques qui sont pertinentes ou non-pertinentes. Elles ont également permis d’exhiber des cas où une CMC correcte est liée à une CMS incorrecte. L’exemple d’une CMS absente occasionnant une erreur mathématique commune, alors même que la CMC était présente, a également permis d’affiner la distinction entre les catégories de connaissances. Pour chacune de ces illustrations, les effets sur les choix didactiques des enseignants sont marquants.

Ces résultats incitent tout d’abord à considérer les connaissances mathématiques spécifiques à l’enseignement de manière distincte des connaissances mathématiques communes d’une part et des CME de type pédagogique d’autre part. Mais, du point de vue de la formation, ils incitent surtout à travailler les liens entre ces connaissances afin de permettre une plus grande pertinence mathématique de l’enseignant généraliste.

Les questions que cette recherche nous a amené à nous poser sont plus nombreuses que les réponses apportées. Elles concernent en particulier le développement effectif ou possible des CME, que ce soit en formation initiale, en formation continue ou durant l’exercice de la profession. Elles interrogent également les effets des manuels et des autres ressources sur les CME nécessaires pour enseigner. Enfin la question des points communs et des différences entre enseignants spécialistes et généralistes quant aux CME devrait encore être discutée.

REFERENCES

Amato S. (2004) Improving student teachers mathematical knowledge. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.icme-organisers.dk/taA/.

Amato S. (2005) *Improving student teachers' understanding of multiplication.* Texte présenté au Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 18 juillet 2011, http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/SolangeAmato_ICMI15.doc.

Ball D. L., Hill H. C., Bass H. (2005) Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf.

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. Consulté le 26 décembre 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf.

Bloch I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation? *Petit x 81*, 25-52.

Brousseau G. (1986) La relation didactique: le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.

Charnay R., Combier G., Dussuc M.-P., Madier D., Madier P. (2007) *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève. Genève. Consulté le 26 décembre 2011, http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047.

Clivaz S. (A paraître) Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique.*

Comiti C., Grenier D., Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. Dans G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien (Eds.) *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1998) *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Davis B., Simmt E. (2006) Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics 61*(3), 293-319. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4.

Dolz J., Toulou S. (2008) De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, http://tfe.revues.org/index596.html.

Fassnacht C., Woods D. K. (2002-2011) Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.transana.org/.

Hill H. C., Rowan B., Ball D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journa, 42*(2), 371-406.

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12*(1), 113–158. Consulté le 24 janvier 2011, http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/.

Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2002) Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp.141-155) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7etview_this_doc=halshs-00421848etversion=1.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/.

Menon R. (2003). Exploring preservice teachers' understanding of two-digit multiplication. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramakrishnanmenon.pdf.

Robert A. (2008) Sur les aprentissages des élèves: une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement In Vandebrouck F. (Ed.) (pp.33-43) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

Schneuwly B., Dolz J., Ronveaux C. (2006) Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In Perrin-Glorian M.-J., Reuter Y. (Eds.) (pp.175-89) *Les méthodes de recherche en didactiques: actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005*. Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.

Tirosh D. et Graeber A. O. (1989) Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics 20*(1), 79-96. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/BF00356042.