

Le bulletin de l'APMEP - N° 535

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2020

Faites vos jeux !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe TeXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD & Olivier REBOUX

Dépôt légal : Mars 2020

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

Faire de la géométrie en grand



Convaincus que la géométrie devient plus facile en expérimentant, Thierry Dias et Jimmy Serment ont mis au point du matériel pédagogique facile à réaliser, permettant d'aborder des sujets de géométrie spatiale avec des élèves dès le cycle 3. Voici donc de quoi tester dans vos classes !

Thierry Dias & Jimmy Serment

Pourquoi expérimenter ?

La géométrie est un terrain privilégié pour faire des expériences en mathématiques, il faut en profiter ! C'est un domaine qui doit en effet privilégier une approche expérimentale en proposant la manipulation d'objets concrets dans les activités des élèves qui peuvent ainsi construire un rapport sensible aux objets et aux relations de la géométrie. De plus, et comme nous avons eu l'occasion de l'écrire [1], ce sont ces expériences qui permettront *in fine* aux élèves d'accéder plus facilement à l'abstraction. La plupart des exercices scolaires de géométrie se font pourtant encore aujourd'hui dans l'environnement papier-crayon qui reste un espace médiatisé les privant de ce rapport sensible direct. Les élèves n'ont en effet que rarement l'occasion de construire, de manipuler et d'expérimenter dans un espace en trois dimensions. L'approche des pratiques géométriques qu'implique l'utilisation systématique d'un manuel, peut également laisser à penser aux élèves que les connaissances géométriques ne s'acquièrent que par la compilation de nombreux exercices. Cependant, nous savons que ces exercices sur papier, aussi bien préparés qu'ils soient, ne donnent à voir qu'une représentation des objets et les relations géométriques dont le degré d'abstraction est important. Nous pensons qu'il faut rendre la géométrie plus vivante, dans

des activités où les élèves agissent, interagissent, se posent des questions et essaient de résoudre des problèmes proposés de manière plus autonome [2]. Ils font ainsi des allers-retours entre leurs connaissances spatiales, construites empiriquement dans un registre sensible (en situation d'expérimentation), et les connaissances théoriques des objets en jeu [3].

Construire en grand ?

Certes, les élèves font parfois des constructions géométriques en classe (par exemple avec du matériel type *Polydron*), cependant elles se pratiquent souvent individuellement et se déroulent dans le format réduit d'une feuille A4. La petite taille de ces constructions n'incite pas à la collaboration, aux échanges et interactions entre pairs. **Comme nous l'avons précédemment écrit [4], nous pensons qu'il est nécessaire d'utiliser un espace plus grand (mésospace), dans lequel les élèves n'ont pas la possibilité de tout observer en un seul regard [5].**

Les élèves peuvent alors entrer dans les formes construites, tourner autour d'elles afin de renforcer leurs compétences de visualisation spatiale. Van Hiele propose à ce sujet cinq niveaux de pensée en géométrie dont le premier niveau est celui de l'identification-visualisation [6], il peut être développé dans un environnement matériel de



grande taille. De façon complémentaire, nous pensons que les interactions langagières sont importantes, tout comme la coopération et le partage de connaissances pour répondre aux situations proposées [4]. En privilégiant le recours à un milieu matériel spécifique dédié à des constructions de grande taille du type baguettes et connecteurs comme nous le proposons, ceci permettra aux élèves de mieux identifier et comprendre les propriétés des objets géométriques en jeu [7].



Dodécaèdre.

Ce grand dodécaèdre construit avec des baguettes de 1 m change considérablement le point de vue que l'on peut avoir sur un tel objet et sur sa capacité à représenter le polyèdre correspondant. Il est possible d'entrer à l'intérieur, de tourner autour et même de la déplacer pour mieux en observer les propriétés.

Quelles activités ?

En appui sur notre avant-propos, nous proposons des activités de construction, de manipulation et de réflexion à des élèves âgés de 10 à 12 ans. Nous avons ainsi élaboré cinq tâches s'appuyant essentiellement sur les propriétés des solides de Platon (polyèdres réguliers) afin de mettre en jeu les connaissances suivantes :

- les propriétés de polygones particuliers : quadrilatères et triangles ;
- le parallélisme et la perpendicularité (dans le plan et dans l'espace) ;
- les propriétés de quelques solides (relations entre faces, arêtes et sommets).

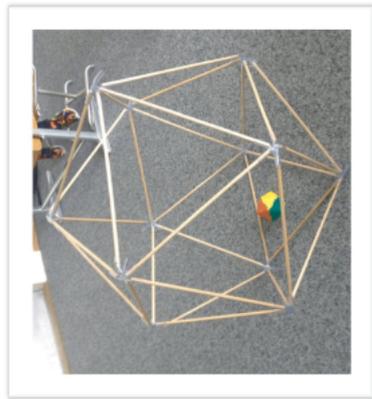
Pour accompagner ces activités, nous proposons cinq fiches pédagogiques¹ facilitant le travail de préparation des enseignants. Chaque fiche-guide (une par solide de Platon) présente :

- une illustration du solide et quelques connaissances sur le polyèdre correspondant ;
- la liste du matériel nécessaire à sa construction ;
- les différentes étapes de l'activité ;
- les objectifs (qui sont ceux du Plan d'Études Romand en Suisse) ;
- les thèmes abordés ;
- les consignes à donner ;
- des réponses et explications pour la correction ;
- un lien internet pour fabriquer le matériel.

1. Ces fiches sont accessibles sur le site d'*Au fil des maths* .

1. ICOSAEDRE GEANT

Icosaèdre avec des baguettes de 50 cm.



Quoi? Comment?

Un icosaèdre est:

un des 5 solides de Platon (ou solides réguliers). Il tire son nom du grec "íkosa" = vingt et "édro" = siège, base. Platon a associé sa forme à l'élément de l'eau dans le Timée.



composé de 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes. En reliant le centre de ces faces, on obtient un dodecaèdre, l'un des autres solides réguliers.



Matériel :

Il faudra 30 baguettes de bois d'un diamètre de 1 cm et de 10-11 cm de long et de diamètre intérieur de 1 cm) que l'on perce au milieu avec un poinçon. Il vous suffit ensuite d'y insérer une vis (type M4, 25mm par exemple) et un écrou (M4) pour serrer les trois morceaux de tuyau. *



* « Que nul n'entre ici qui ne soit géométriste »
Platon

Il y a plusieurs étapes dans cette activité (voir consignes).

1. La construction du solide.
2. Le dénombrement des faces, arêtes et sommets.
3. La recherche des segments parallèles et perpendiculaires.
4. La recherche des plans perpendiculaires.

Âge des élèves: 10-12 ans, 7H-8H.

Objectifs: **MSN 21 — Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace...**

...en dégagant des propriétés géométriques des figures planes.

...en dégagant des propriétés des solides.

Thèmes abordés :

- Parallélisme et perpendicularité
- Propriété des rectangles
- Construction de solides
- Propriété de solides

* https://www.simplyscience.ch/a-faire-enseignants/articles/la-geometrie-dans-lespace-cest-facile.html?_locale=fr

Fiche sur l'activité de l'icosaèdre géant

Consignes:

1. Construis un icosaèdre. Utilise les baguettes de bois (1m) et les connecteurs souples. Combien a-t-il :
- de sommets ?
- d'arêtes ?
- de faces ?
Peux-tu trouver une relation entre ces nombres?
2. Construis un second rectangle, perpendiculaire au premier. Peux-tu répéter cette opération une troisième fois?
3. Utilise de la laine et essaie de connecter les sommets de l'icosaèdre. Peux-tu construire un rectangle ?
4. Construis un second rectangle, perpendiculaire au premier. Peux-tu répéter cette opération une troisième fois?



Voici une représentation des trois rectangles dans l'icosaèdre, tous perpendiculaires les uns des autres. Ces rectangles ont une largeur de 1m. et une longueur de φ , soit $(1+\sqrt{5})/2$ qui est le nombre d'or.

Réponses et quelques astuces



1. L'activité de construction avec les connecteurs souples est compliquée, car les connecteurs ne donnent pas d'angle fixe et il y a 6 entrées et il faut en utiliser que 5 par sommet (voir images ci-contre). Pour faciliter la construction, on peut inviter les élèves à observer le nombre de triangles sur chaque sommet de l'icosaèdre. Il peut être construit aussi avec les polydrons en préalable pour obtenir un modèle en petit.
2. 12 sommets (S), 20 faces (F), 30 arêtes (A). Relation d'Euler : $S+F-A=2$
- 3.



4. Les 3 rectangles sont représentés sur l'image ci-dessus. Chaque rectangle passe par 4 sommets différents de l'icosaèdre. Au total, tous les sommets de l'icosaèdre seront donc utilisés pour représenter les 3 rectangles. S'il y a des difficultés à voir ces 3 rectangles, il suffit de poser l'icosaèdre sur une de ces arêtes, ceci aura l'effet d'obtenir des rectangles horizontaux et verticaux.

Liens avec d'autres fiches

Possibilité de faire des liens avec les fiches d'activité ...





Le déroulement de chaque activité est le suivant :

- construction collaborative du solide ;
- réflexion sur les propriétés des objets géométriques, notamment en rapport à la géométrie plane.

Les élèves construisent les solides avec des baguettes de 1 mètre de longueur (parfois de 50 centimètres) en les assemblant à l'aide de connecteurs en plastique (sommets). Ils doivent collaborer du fait de la taille des objets construits mais aussi utiliser un vocabulaire adéquat dans leurs échanges oraux afin de rendre leurs interactions significatives. Pour réussir certaines constructions comme le dodécaèdre géant (qui dépasse deux mètres) ou l'icosaèdre (qui comporte des connecteurs souples provoquant son instabilité jusqu'à la fin de la construction), de nombreux allers et retours entre connaissances spatiales, gestes, actes et connaissances géométriques sont nécessaires : les constructions ne vont pas de soi.

Le partage des connaissances est nécessaire pour faire avancer les constructions et pour répondre aux questions qui sont soulevées lors de la résolution des problèmes rencontrés.

Lorsque les constructions sont terminées, les élèves peuvent ensuite se déplacer à l'intérieur du solide, en faire le tour ou le déplacer pour varier leurs points de vue. Cela leur permettra de résoudre de nouveaux problèmes comme ceux qui consistent à utiliser certaines propriétés d'objets de la géométrie plane dans un repère en trois dimensions : trouver un triangle particulier ou un carré en reliant les sommets du polyèdre par exemple.

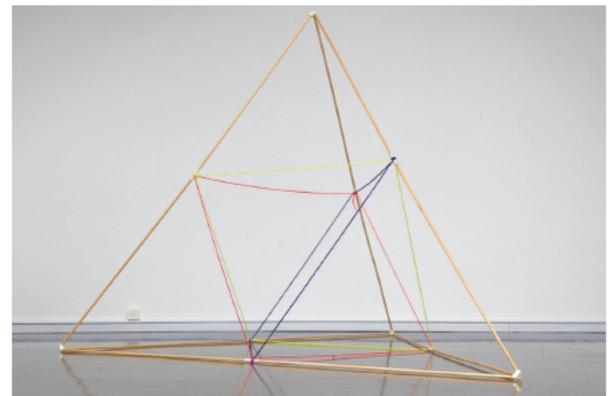
Comment transposer ses connaissances dans un environnement 3D ?

Dans les tâches que nous proposons, après l'étape de construction, les élèves sont sollicités pour répondre à des questions spécifiques. On leur demande par exemple de simuler le tracé de certains quadrilatères à l'intérieur des solides en

utilisant de la laine pour relier les sommets du polyèdre. Le problème est alors un peu plus complexe et la situation s'appuie dès lors davantage sur la validation (vs action, formulation). Elle est néanmoins indispensable pour que les élèves expérimentent une représentation différente des objets (comme le segment, l'angle, le polygone, etc.) dans un registre différent convoqué dans un environnement en trois dimensions.



Laine tendue à l'intérieur d'un dodécaèdre pour représenter un cube.



Laine tendue à l'intérieur d'un tétraèdre pour représenter un octaèdre.

Les expériences consistant à utiliser un environnement de référence en 3 dimensions (le solide creux) pour représenter des objets familiers de la géométrie (segment, carré, triangle) et des relations connues comme le parallélisme ou la



perpendicularité, sont nouvelles pour les participants. C'est un changement de point de vue fondamental renforçant notamment la visualisation spatiale et la conceptualisation.

Conclusion

En proposant des situations didactiques ancrées sur la dimension expérimentale des mathématiques, on permet aux élèves de construire un rapport différent aux objets et relations géométriques. Ce sont les allers et retours entre expériences sensibles (par manipulation, déplacement, construction) et connaissances théoriques (propriétés des objets) qui permettent le passage du concret à l'abstraction nécessaire à la construction des connaissances mathématiques. Ce type de pratique des mathématiques est aussi l'occasion de mettre en évidence et de prendre appui sur l'esthétisme des objets géométriques comme les polyèdres qui peut *in fine* renforcer le sentiment de plaisir à faire des mathématiques [8]. L'aspect collaboratif des tâches est également un élément déterminant puisqu'il permet les interactions orales et le partage des connaissances dans des situations alternant entre action, formulation et validation [9].

Références

- [1] Dias T. *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris, France : Magnard, 2017.
- [2] P. Lockhart. *La lamentation d'un mathématicien*. Boitsfort, Belgique : L'arbre de Diane, 2017.
- [3] R. Berthelot et M. H. Salin. « L'enseignement de la géométrie à l'école primaire ». In : *Grand N* n° 53 (1993), pp. 39 56.
- [4] T. Dias et J. Serment. « Formation à la géométrie dans l'espace par la construction de polyèdres ». In : *Actes du XXXIII^e colloque COPIRELEM* (2017). Le Puy en Velay.
- [5] R. Berthelot et M. H. Salin. « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de Doctorat. » Université Sciences et Technologies Bordeaux I, 1992.
- [6] A. Braconne Michoux. « Les niveaux de pensée en géométrie de Van Hiele : de la théorie à l'épreuve de la classe ». In : *Bulletin AMQ* Vol. LIV.n° 1 (2014).
- [7] R. Duval et M. Godin. « Les changements de regard nécessaires sur les figures ». In : *Grand N* n°76 (2005), pp. 7 27.
- [8] T. Dias et J. Serment. *Une petite fable théâtrale sur la beauté des objets mathématiques et sur le plaisir de les apercevoir*. Éducateur spécial, 2019.
- [9] J. Serment. « Dispositif pour aborder la notion d'angle avec des élèves de 11 12 ans dans une classe d'enseignement spécialisé dans le canton de Vaud (Suisse) ». In : *Actes du colloque EMF 2018* (2019).

Crédit photos : Lucien Agasse HEPL Suisse.



Jimmy Serment enseigne dans l'Établissement primaire de Pully-Paudex-Belmont en Suisse.

jimmy.serment@hepl.ch

Thierry Dias est professeur au sein de la Haute École Pédagogique du canton de Vaud (UER Mathématiques et Sciences). Il travaille entre autres sur la place de la manipulation dans la construction des connaissances mathématiques.

Au Fil des Maths a besoin de vous

J'ai un peu de temps

Écrire une fiche d'activité SNT pour la partager (modèle de fiche sur demande : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 2 h

Prérequis : enseigner en lycée.

Relire des articles pour la revue numérique avant la mise en ligne (contact : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 30 min par article

Prérequis : être bon en orthographe.

Donner un coup de main à la revue numérique en codant un article en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 3 h

Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Comment nous aider ?

Donner un grand coup de main à la revue numérique en codant plusieurs articles en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délais à respecter.
≈ 3 h par article

Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Écrire un article ! Tous les niveaux et toutes les thématiques nous intéressent (angoisse de la page blanche : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 6 h

Prérequis : avoir un sujet... mais pas besoin d'être doué en écriture !

J'ai davantage de temps

Rejoindre l'équipe technique : coder en TeX un ou plusieurs articles selon un cahier des charges (contact : Isabelle).

Travail régulier : tous les trois mois avec délais à respecter.
≈ 30 min par page

Prérequis : maîtriser LaTeX.

Rejoindre l'équipe de rédaction : une bonne idée ! (tout renseignement : Lise).

Travail avec engagement.
5 réunions par an à Paris (des samedis). Travail sur des articles en dehors des réunions.
Prérequis : aimer travailler en groupe et mener un projet à terme dans le respect des contraintes éditoriales. Avoir envie de s'investir.

J'ai beaucoup de temps

Écrire des recensions : lire un ouvrage récent (proposé et fourni par Valérie) puis écrire un court article pour le décrire et le commenter pour le faire découvrir aux collègues.

Libre organisation du temps, avec engagement.
≈ 6 h par article

Prérequis : aimer lire et donner une opinion argumentée.

Isabelle : iflavier@orange.fr
Lise : aufildesmaths@apmep.fr
Marianne : marianne.fabre@ac-amiens.fr
Valérie : laroseAFDM@netc.fr

Sommaire du n° 535

Faites vos jeux !

Éditorial	1	Ouvertures	43
		Et si on modélisait ? — Gaëlle Bugnet et Vicky Kass-Canonge	43
Opinions	3		
✦ Jeux et maths, où en est-on ? — Éric Trouillot	3	Nombres et écritures de nombres — Pascal Michel	52
À chaque établissement son laboratoire de maths — Hubert Proal	9	« <i>Gentilles</i> » fonctions polynomiales de degré 3 — Jacques Marot	57
		✦ Quelques beaux problèmes du logiciel Jeux2019 — Guy Noël & Yolande Noël-Roch	70
Avec les élèves	13		
✦ Des puzzles en cycle 1 — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpson & Isabelle Wettendorff	13	Récréations	77
Le glisse-nombre — Anne-France Acciari	19	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	77
✦ Tickets de grattage ou comment gagner 120 000 €. . . — Gilles Damamme	22	✦ Mathémagie au collège — Dominique Souder	79
✦ Le Rallye Mathématique Transalpin — Christine Le Moal	28	✦ Le jeu de Juniper Green — Valérie Larose	84
		✦ <i>Match Point</i> une brochure JEUX pas comme les autres ! — Jean Fromentin	86
Faire de la géométrie en grand — Thierry Dias & Jimmy Serment	37	Au fil du temps	88
		Matériaux pour une documentation	88
		Anniversaires — Dominique Cambrésy	94



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr