LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE.

Jimmy SERMENT*

Résumé – L'enseignement de la géométrie dans l'espace est souvent délaissé au secondaire1 (élèves âgés de 11 à 15 ans actuellement), faute de moyen mis à disposition des élèves. Cette recherche tente d'observer et d'analyser des élèves de l'enseignement spécialisé dans des situations problèmes concrètes en géométrie de l'espace.

Mots-clefs : espace, géométrie, expérimentations, constructions, apprentissage.

Abstract – The teaching of 3D geometry is often abandoned in lower secondary education (11 to 15 years old pupils) due to a lack of means given to students. This research made observations and analyses of students with special needs in special education classes in situations of concrete problems in 3D geometry.

Keywords: space, geometry, experimentations, constructions, learning.

I. INTRODUCTION

En Suisse Romande et au Tessin, les enseignants de l'école obligatoire en mathématiques sont tenus de suivre les manuels institutionnels de la Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique, CIIP, manuels qui sont constitués par des fiches ou des exercices. Or, concernant la géométrie, aucune activité de ces manuels ne propose de construction, de fabrication d'objets réels dans l'espace. Pourtant l'unique compétence visée en géométrie du Plan d'Etudes Vaudois (PEV[1]) est : « modéliser le plan et l'espace » (PEV 2003, partie B 15-7). Chaque année, les thèmes des propriétés des triangles et quadrilatères, des droites remarquables dans le triangle, des solides et celui des aires et volumes doivent être repris à zéro, comme si les élèves n'avaient appris leurs leçons que pour l'évaluation finale. L'enseignement de ces thèmes se fait le plus souvent de manière déductive, l'enseignant donne le fonctionnement à l'élève et celui-ci doit ensuite l'appliquer à divers exercices sur papier. Cette manière d'enseigner permet certainement à l'enseignant de gagner du temps, mais on peut penser qu'elle ne permet pas à tous les élèves de s'approprier toutes les notions des thèmes précédemment cités. Au final, qu'ont-ils retenu ?

Pour développer ce point de vue critique envers un enseignement plus traditionnel de la géométrie (Bkouche 2006), j'ai déjà pratiqué quelques expérimentations dans le cadre de mon enseignement qui se place dans le cadre d'une classe ressource, c'est-à-dire avec des élèves présentant un certain retard scolaire, pour des raisons diverses (voir plus loin). J'ai fait fabriquer concrètement divers polyèdres aux élèves, comme des cubes, des parallélépipèdes rectangles, des pyramides, des tétraèdres. La fabrication de solides s'est faite de quatre manières différentes. La première étant la construction de cube en polystyrène, les élèves ont dû construire les plus grands cubes possibles à partir d'une plaque de polystyrène de 50×100×8 cm, cette activité a permis construire des cubes à partir des faces. La deuxième construction s'est faite à partir de l'assemblage de pailles de vingt centimètres et de connecteurs afin de faire construire de petits cubes à partir des arêtes. La troisième construction ressemble à la deuxième, seule la taille de l'objet diffère, les élèves ont dû construire un cube d'arête de deux mètres à partir de tube et de connecteurs en PVC (Serment

* Haute Ecole Pédagogique Vaud – Suisse – j.serment@hotmail.fr

[1] http://www.vd.ch/fr/themes/formation/scolarite-obligatoire/plan-detude-vaudois/

2012). Le dernier type de construction, plus traditionnel, est la construction de solide à partir d'un développement.

Par la suite, j'ai proposé des constructions d'objets plus complexes, en assemblant les différents polyèdres précédents. Les élèves ont dû assembler plusieurs tétraèdres pour former des kaléidocycles (suite de tétraèdres assemblés circulairement, figure I). L'étape ultime des constructions a été la construction d'un grand cube transformable à partir de huit petits cubes coupés par la section hexagonale régulière. Ce grand cube peut se transformer en deux octaèdres tronqués (Figures II et III).

Après avoir fabriqué ces solides, les élèves ont dû narrer ce qu'ils avaient vécu durant toute la séquence à travers le média d'Internet. Les élèves ont écrit dans une premier temps une présentation avec le logiciel Keynote, ils ont dû relater tout ce qu'ils ont retenu et appris en faisant les diverses expériences proposées. Cette présentation a été transformée en vidéo puis difusée sur Youtube et sur un blog de la classe[2].

En faisant ceci, j'ai remarqué que j'avais agi sur *la* compétence principale visée en géométrie dans le PEV : « Modéliser le plan et l'espace » mais également sur d'autres compétences également visées par le PEV :

- construire des figures géométriques
- construire des figures planes
- représenter des solides en perspective et en faisant le développement
- définir des figures par certaines de leurs propriétés
- communiquer une marche à suivre, un raisonnement en utilisant un vocabulaire adéquat.

Un nouveau plan d'études est en train de prendre la place du PEV, le *Plan d'Etudes Romand* (PER[3]). En ce qui concerne la géométrie, la visée fondamentale sera : « poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace ». Cette visée est toujours respectée dans ma séquence. Le PER précise toutefois les manières d'y arriver en proposant diverses méthodes :

- en définissant des figures planes et des solides par certaines de leurs propriétés géométriques,
- en utilisant des propriétés des figures et leur décomposition en figures élémentaires pour les construire et les reproduire,
- en mobilisant des systèmes de repérages,
- en utilisant les instruments ou les logiciels appropriés,
- en mobilisant des représentations conventionnelles des figures planes et des solides (croquis, dessin à l'échelle, perspective,…),
- en recourant au raisonnement déductif,
- en mobilisant des transformations géométriques,
- en représentant des solides en perspective et en faisant le développement.

En analysant ma séquence a priori, j'ai pu voir que je prenais en compte diverses méthodes citées ci-dessus, notamment, dans un premier temps, « en définissant des figures planes et des solides par certaines de leurs propriétés géométriques ». Dans un deuxième temps, j'ai fait travailler les élèves « en utilisant des propriétés des figures et leur décomposition en figures élémentaires pour les construire et les reproduire », ou encore « en utilisant les instruments ou les logiciels appropriés ». En fin de séquence, ils ont construit leurs apprentissages « en mobilisant des représentations conventionnelles des figures planes et des solides (croquis,

[2] http://classer.over-blog.com/pages/les-videos-des-cubes-6143148.html

[3] http://www.plandetudes.ch/web/guest/home

dessin à l'échelle, perspective…) » et enfin « en représentant des solides en perspective et en faisant le développement ».

II. QUESTION DE RECHERCHE ET BUTS POURSUIVIS

La question de recherche qui motive mon travail est de façon générale : « les situations de constructions d'objets géométriques dans l'espace sont-elles susceptibles de révéler les connaissances géométriques des élèves d'une classe ressource ? »

Le but principal est de proposer une autre démarche d'enseignement de la géométrie. Cette nouvelle manière d'enseigner devrait permettre aux élèves de mettre en relation l'aspect théorique de certaines notions géométriques avec des objets réels. Les élèves seront ainsi plus actifs, car ils seront impliqués sur une de leur construction tout en construisant des compétences que l'on peut référer au plan d'études en vigueur.

Plusieurs autres buts seront également poursuivis :

- Consolider les apprentissages des élèves sur le long terme.
- Rendre les théories géométriques plus concrètes, plus intéressantes grâce à la réalisation des objets.
- Développer chez l'élève des connaissances théoriques en géométrie plane, en géométrie de l'espace puis permettre mettre en relation ces deux géométries (Gonseth 1945).

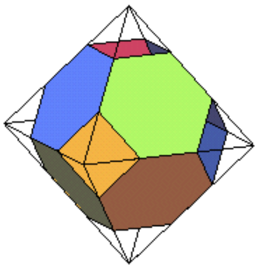
III. LES CONDITIONS DE REALISATION DU TRAVAIL

1. Sources d'information ou d'observation

Je travaille dans la classe ressource (Res) de collège secondaire de Pully. Dans cette classe, il y a une douzaine d'élèves âgés de 11 à 16 ans qui ont un retard scolaire par rapport aux élèves des classes ordinaires. Ces élèves n'ont pas de troubles psychologiques ni psychiatriques avérés. Certains ont également des troubles du comportement, ils sont dans la classe Res car ils dérangent le bon fonctionnement des classes ordinaires. Le public de la classe Res est donc hétérogène, il va du jeune à haut-potentiel qui n'arrive pas à se concentrer dans sa classe, au jeune ayant un QI entre 70 et 100, en passant par les jeunes « normaux » qui ont des problèmes de comportement dans leur classe ou encore des jeunes avec des handicaps physiques comme des surdités partielles. La plupart ont aussi des troubles associés telle la dyslexie, la dyscalculie ou la dysorthographie.

2. Description et déroulement de l'expérimentation

Les élèves doivent fabriquer deux objets géométriques, un kaléidocycle et un cube d'octaèdres tronqués.

		
***Figure I** – Kaléidocycle*	***Figure II** - Octaèdre tronqué*	***Figure III** - Octaèdre tronqué 2e transformation*

Ces deux choix de constructions se justifient en analysant leur composition. Pour faire le premier, on part d'un rectangle de papier avec un rapport longueur/largeur bien précis. Les élèves doivent ensuite y inscrire des losanges en faisant des parallèles et des perpendiculaires. La dernière étape étant le pliage et la création du kaléidocycle (six tétraèdres disposés circulairement) en trois dimensions. On commence donc cette activité avec les quadrilatères, les rapports et la construction de parallèles et perpendiculaires, ensuite il y a le passage du rectangle plat vert la troisième dimension, enfin on termine l'activité avec les tétraèdres.

Pour le cube d'octaèdres tronqués, Il y aura cinq étapes différentes lors de la séquence pédagogique :

Activité de l'élève	Savoir	Savoir-faire ou qualités requises (ex précision)
1. La construction de petits cubes (8 cm. d'arrête) en polystyrène. A partir de grandes plaques de polystyrène (50x100x8 cm), les élèves devront découper les plus grands cubes possibles. Pour ce faire, ils disposeront de deux machines de découpe de polystyrène à fil chaud.	Propriétés et constructions de parallèles et perpendiculaires. Propriété du carré et du cube.	Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
2. Les sections du cube. Une fois les cubes formés, les élèves devront trouver les diverses sections du cube possibles. Pour les réaliser, ils devront couper leurs cubes avec les deux mêmes machines.	Propriétés des triangles et quadrilatères.	Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
3. La section hexagonale régulière du cube. Les élèves construiront un cube géant à partir de pailles et de connecteurs. A l'intérieur de ce cube géant, les élèves devront mettre de la ficelle sur les arrêtes afin de former la section hexagonale régulière.	Propriétés et construction de l'hexagone régulier.	
4. Formation de la forme finale en polystyrène, à partir de huit sections hexagonales régulières du cube. Une fois l'étape 3 passée, les élèves découperont dans le polystyrène huit formes identiques (cubes coupés en deux par la section hexagonale régulière), ils les assembleront pour former un octaèdre tronqué, qui pourra se transformer également en cube évidé de l'intérieur.	Aires et volumes. Construction de solides	Patience. Précision. Maîtrise des outils spécifiques (coupeurs à fil chaud).
5. Formation de la forme finale en papier. Les élèves devront faire le développement du cube coupé par sa section hexagonale régulière, puis répéter l'opération 16 fois, afin de former deux octaèdres tronqués et au final les assembler. Cela	Construction de solides, réalisation de développements (constructions de médiatrices, du cercle	Utilisation des outils géométriques (règles, équerre, compas). Utilisation de l'outil informatique.

permettra aux élèves de résoudre leur question de recherche posée en début de séquence.	de Thales, des angles et de l'hexagone régulier)	Motricité fine (assemblage des développements et de l'ensemble des pièces) Patience. Précision.

Figure IV *- Tableau : Les relations entre les étapes de la construction et les savoirs en jeu*

Dès le début de la séquence, les élèves sont mis dans une situation de recherche. Ils doivent reconstruire et compléter la partie intérieure d'un cube évidé d'un octaèdre tronqué.

Durant les 5 étapes citées ci-dessus, divers documents écrits sont récoltés. Nous travaillons plusieurs connaissances en géométrie, comme les propriétés des triangles et quadrilatères, les notions de parallèles et de perpendiculaires, les aires et les volumes, ainsi que le dessin géométrique.

Les élèves passent des quadrilatères en deux dimensions pour finir avec la troisième dimension et le cube. Il y aura également dans cette séquence le passage inverse, en commençant par les volumes (cube) pour finir avec les sections du cube.

Ces deux activités permettent donc de travailler les compétences en géométrie du plan d'études, citées précédemment.

3. Hypothèses

Pour les jeunes de la classe Res, les mathématiques riment avec *drill numérique* (tâches mécaniques et répétitives). Comme ces élèves n'arrivent pas à suivre le programme des classes ordinaires, le reflexe de la plupart des enseignants spécialisés est de simplifier les exercices. Cette simplification amène les enseignants à faire faire aux élèves beaucoup d'exercices de calcul sur les quatre opérations, des exercices de drill de calculs, et par conséquent d'oublier ou de mettre de côté les apprentissages en géométrie. Ma première hypothèse va à contre-courant de ce que je viens d'expliquer, je pense qu'il est indispensable de proposer des situations complexes, pouvant mettre ces élèves en situation de recherche. A mon avis, il faut proposer des situations attrayantes et suffisamment complexes pour permettre aux élèves de réfléchir sur les mathématiques et pas seulement d'appliquer des mathématiques. Cette façon de penser montrera aux élèves aussi que j'attends d'eux un certain travail et que je les considère comme capables de résoudre des situations problèmes complexes. Ce regard de l'enseignant sur les élèves est important pour l'estime de soi des enfants. Un enseignant qui croit dans les capacités de ses élèves va leur montrer et ceux-ci sentiront qu'ils sont considérés comme des apprenants et pas comme des élèves ne pouvant rien apprendre. Cette manière d'agir, en proposant des exercices complexes, devrait donc motiver les élèves, révéler leur potentiel et augmenter leur estime de soi.

Tout enseignant devrait croire au postulat d'éducabilité de Philippe Meirieu, surtout quand on est en face d'enfants avec des difficultés d'apprentissage. Evidemment ce postulat ne doit pas nous faire oublier que si ces élèves sont dans la classe Res, c'est qu'ils n'ont pas réussi à suivre le programme ordinaire, mais cela ne veut pas dire qu'il n'est pas possible d'appliquer le postulat de Meirieu. Ma deuxième hypothèse va dans ce sens, je pense que ces élèves sont capables d'apprendre, mais qu'ils n'utilisent pas les mêmes canaux que la plupart des autres élèves. Le rôle de l'enseignant est donc de trouver d'autres pistes pour faire passer les apprentissages auprès des enfants avec des difficultés scolaires.

4. Méthode de récolte de données

Les élèves ont été filmés, enregistrés vocalement et ont présenté les constructions géométrique. Leurs productions ont été également photographiées. Ils ont tenté d'expliquer comment reproduire l'objet géométrique construit en narrant les diverses étapes pour y arriver. Les objectifs pour eux sont qu'une personne quelconque puisse reproduire leur construction grâce à leurs explications, schémas, dessins, vidéos, ainsi que montrer ce qu'ils ont fait et retenu.

J'ai tenu aussi un journal de bord, où j'ai noté des éléments de séquences pédagogiques pendant la préparation des constructions et des productions d'élèves.

5. Petit tour épistémologique

Qu'entend-on par espace ? L'espace est une des deux intuitions pures kantiennes, l'espace est donc une sorte de condition d'existence des objets a priori. Nous ne pouvons pas créer ou imaginer l'espace, car il préexiste avant les objets. Il ne peut pas y avoir des objets dans l'espace si l'espace n'est pas considéré comme préalable. Kant nous dit d'ailleurs : « … l'espace ne peut être comme quelque chose en nous. » (Kant 1781), cela signifie que l'espace est hors de nous, qu'il existe sans notre présence, mais que nous en avons une « intuition pure » de sa préexistence. Sans cette nature de l'espace, l'existence même de tous nos objets serait remise en cause par la logique. Si l'on image que l'espace venait à être postérieur à l'existence des objets eux-mêmes, il y aurait donc une incohérence, car l'objet ne peut pas former l'espace entier. Il doit y avoir un espace a priori, contenant tous les objets de la pensée. « L'espace ne représente pas une propriété des choses en soi […] il n'y a point de déterminations, ni absolues, ni relatives, qui puissent être intuitionnées antérieurement à l'existence des choses … » (Ibid.), ceci est donc la première conséquence du concept de l'espace comme une intuition pure.

Sans cette « matrice » qu'est l'espace, les objets ne seraient pas concevables, Brousseau le dira aussi plus tard : « il est assez commun de justifier l'enseignement de la géométrie par le fait qu'elle est la science de l'espace, le décor essentiel de toutes nos actions et la matrice de toutes nos conceptions » (Brousseau 2007).

Ce point de vue mène donc l'homme à avoir avant toute chose des intuitions. Kant, toujours dans la critique de la raison pure, dit : « de quelque manière et par quelque moyen qu'une connaissance puisse se rapporter à des objets, le mode par lequel elle se rapporte immédiatement à des objets, et que toute pensée, à titre de moyen, prend pour fin, est l'*intuition.* » (Kant 1980). L'intuition est d'ailleurs considérée comme le premier des quatre principes de Kant. Sur ce principe, qu'il qualifie de mathématique, nous ne pouvons pas agir, car l'homme doit avoir cette intuition d'un espace a priori, sans quoi l'homme ne pourrait pas pousser la réflexion plus loin.

Maintenant que la notion de l'espace a été clarifiée, on peut la lier directement à la Géométrie, comme le dit Greenwood : « Toutes les sciences de la quantité empruntent à l'intuition et surtout la Géométrie : l'intuition du discret, du continu, du continu homogène, de l'espace pur » (Greenwood 1926). L'étude des objets, des corps dans l'espace est donc directement affectée par ce positionnement sur le terme espace. La Géométrie est même privilégiée, car elle met en relation directement les objets et l'espace.

Cependant, il n'est pas suffisant de posséder ces deux intuitions pures pour commencer à faire de la géométrie. En effet, une fois l'espace étant intuitionné, il nous faut percevoir les objets de l'espace. Pour ce faire, nous devons utiliser nos sens, la vue, l'ouïe, le toucher…

Cette perception, cette sensation nous permettra d'apprécier la qualité des objets réels. Cette deuxième étape d'un raisonnement en géométrie de l'espace est le deuxième principe de Kant. Pour apprécier les phénomènes, le réel nous devons utiliser la subjectivité de nos sens, ainsi « L'espace n'est autre chose que la seule forme de tous les phénomènes des sens externes, c'est-à-dire la condition subjective de la sensibilité… » (Kant 1980). (L'utilisation du terme subjectivité des sens est présent car l'être humain est doté d'appareils sensibles limités dans la réception d'information sur l'objet. Nous ne pouvons pas, par exemple, voir les rayons x, ce qui montre que notre appareil sensible ne prend pas en compte tous les éléments possibles de l'objet, nous n'avons donc qu'une partie des informations de l'objet.)

Sans ses sensations, nous ne percevrions pas les objets et par conséquent nous ne ferions pas de géométrie. « Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie » (Poincaré 1968), cette citation montre effectivement que nous devons percevoir des objets concrets pour faire de la géométrie. Nous ne pourrions pas avancer plus dans notre raisonnement géométrique si n'avions pas ces capacités de sensations. « La capacité de recevoir (la réceptivité) des représentations grâce à la manière dont nous sommes affectés par des objets s'appelle *sensibilité*. C'est donc au moyen de la sensibilité que des objets nous sont donnés, et elle seule nous fournit des *intuitions* » (Kant 1980). Kant nomme ce deuxième principe l' « anticipation de la perception ». Pour lui, ce principe est aussi un principe mathématique et donc inné car il est difficile de travailler sur nos sens. Toutefois, j'émets l'hypothèse qu'il est primordial de faire vivre aux élèves des sensations en géométrie, certes, il sera difficile pour un enseignant d'agir directement sur la perception des sens des élèves, mais il est important de pouvoir activer chez eux leurs sens en proposant des objets réels. Je suppose donc qu'un enseignant peut agir indirectement sur les sens des élèves en faisant construire des objets en trois dimensions. En ce sens, Brousseau ajoute : « Le micro-espace, l'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher ... par la vue, par le mouvement qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés » (Brousseau 2007), l'enfant se construit donc sa représentation de l'espace bien avant son entrée à l'école. Il expérimente, manipule grâce à ses sensations, ses perceptions des objets constituants l'espace.

N'est-ce pas d'ailleurs une des finalités de la géométrie ? Quand Gonseth propose qu' «...aux fins naturelles de toute géométrie qui sont,..., d'étendre et de préciser la connaissance que tout homme possède de l'espace en général et plus spécialement de la forme et de la grandeur des corps, de leurs positions et de leurs déplacements » (Gonseth 1945), il me semble qu'il est indispensable de faire vivre la géométrie aux élèves à travers leurs sensations, leurs perceptions.

Ce deuxième principe ne peut être vu comme étant notre appareil sensible externe nous permettant d'appréhender les objets de notre espace, « Nous ne pouvons donc parler de l'espace, d'êtres étendus, etc., qu'au point de vue de l'homme. Si nous sortons de la condition subjective sous laquelle seulement nous pouvons recevoir l'intuition externe, c'est-à-dire la possibilité d'être affecté par les objets, la représentation de l'espace ne signifie plus rien » (Kant 1980).

Les objets ne sont donc existants que par le fait que nous pouvons les percevoir. De plus, notre manière de percevoir ces objets étant subjective, nous ne pouvons dire que ce que nous voyons est vrai. « Notre esprit s'est adapté aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie la plus avantageuse à l'espèce ; ou en d'autres termes la plus commode... la géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse » (Poincaré 1968), Nous percevons subjectivement des objets dans un espace intuitif pur, a priori. Nos sens nous donnent une représentation des objets de l'espace qui est compréhensible, intuitive pour notre cerveau.

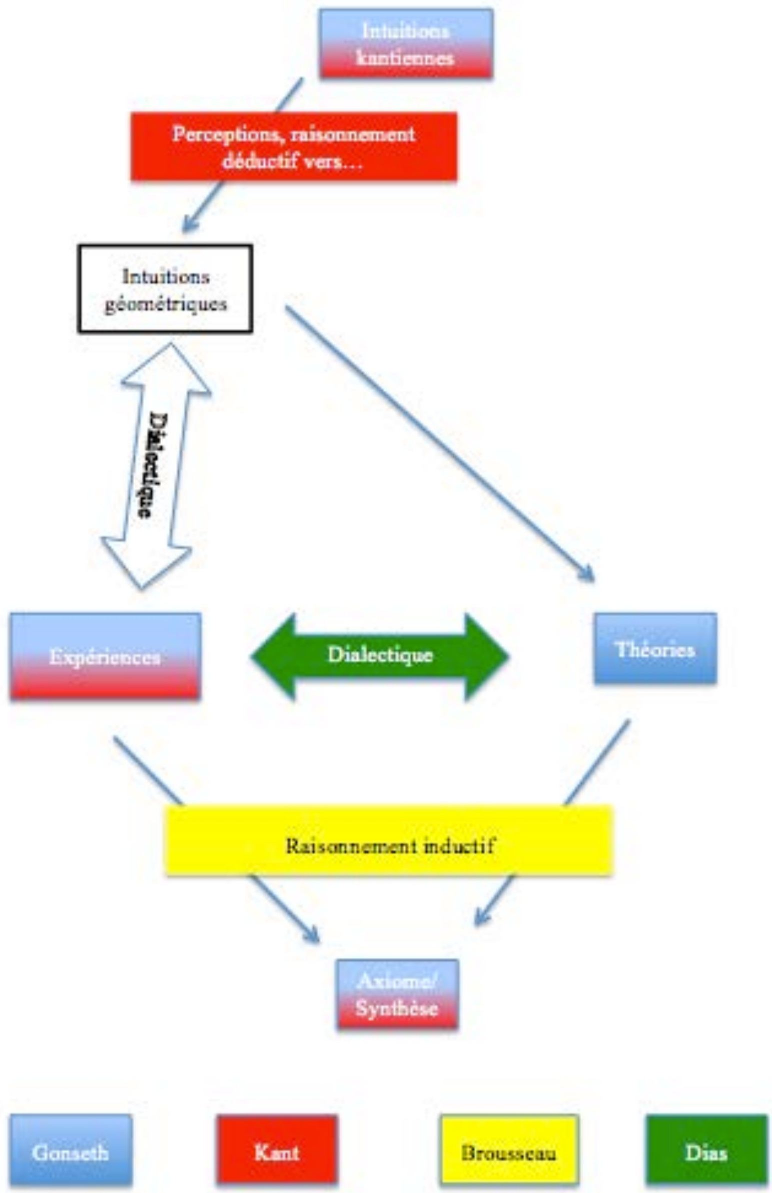


Figure V *– schéma résumant le parcours épistémologique*

La figure V va me permettre d'analyser les données récoltées, je vais essayer de mettre en évidences les deux relations dialectiques dans l'apprentissage de la géométrie. Ce schéma me permettra de situer l'élève dans ses apprentissages, d'observer si l'élève arrive à faire des liens entre l'intuition, l'expérience et la théorie.

Je me suis donné comme axe méthodologique l'analyse de données à travers les narrations de recherche (Bonafé 2003). Pourquoi la forme de narration ? Pour justifier un tel choix, je reprends une citation de François Conne avec laquelle je suis complètement en accord : « la narration est pour moi l'expression vivante d'une pensée » (Conne 2011). Demander aux élèves de raconter comment procéder pour obtenir une construction géométrique permet donc d'observer activement les apprentissages, la manière de penser des élèves. L'usage de la narration permet donc d'aller plus loin que l'impression de réussite ou d'échec d'un élève. Le fait de narrer permet aussi aux élèves de se questionner sur l'activité, de repérer les difficultés (Bachelard 1938) et donc de problématiser l'activité de construction géométrique. La narration, après avoir fait la construction géométrique permet également refaire autrement l'activité, en réfléchissant différemment, bref en utilisant l'aspect métacognitif du retour sur l'activité. Finalement, l'usage de la narration permet aussi à l'élève en enseignement spécialisé de faire l'activité à sa manière, il n'y a pas de « mauvaise » manière de faire, par conséquent l'élève peut exister dans l'activité et exprimer ce qu'il sait sans la crainte du juste-faux. Selon moi, narrer permet d'aider à mieux maîtriser un objet de savoir.

6. Premiers résultats

Les premiers résultats sont des observations faites à partir d'images figées de vidéos. Je vais analyser mes observations en me basant dans un premier temps sur le schéma de la figure V. L'analyse des productions finales des élèves se fera plus tard.

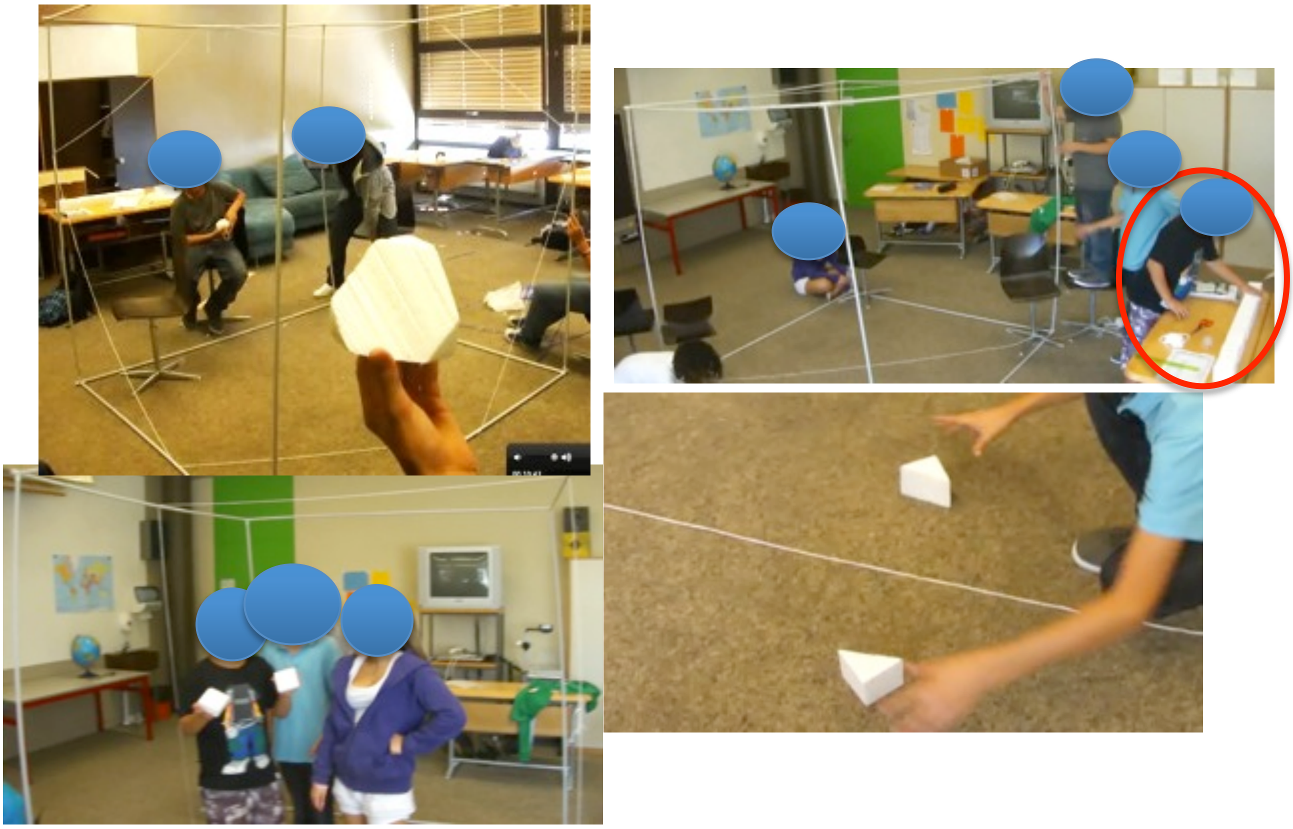


***Figure VI** – Quatre images d'éleves utilisant des expérimentations précédentes pour faire une autre expérimentation*

Sur les quatre images ci-dessus, on peut voir que les élèves ont fait des liens entre les différents exercices proposés. Les élèves doivent, dans l'activité du cube géant, refaire les sections avec de la ficelle. On peut voir, qu'afin d'y parvenir, les élèves prennent les cubes en polystyrène de l'activité précédente (découpes des sections dans des cubes en polystyrène). Les élèves sont donc capables de passer d'un cube défini par des faces (cube en polystyrène) à un cube défini par des arêtes (cube géant). Cette dialectique entre les exercices peut permettre aux élèves de mieux conceptualiser le cube ainsi que ces propriétés. Pour réussir à passer d'un petit cube en polystyrène à un grand défini par des arêtes, l'élève est obligé de maîtriser la notion de parallélisme des faces et arêtes du cube, il doit aussi maîtriser la notion de plan afin de pouvoir faire des sections planes.

Cette dialectique est certainement une des clés de la réussite des élèves, en ne proposant qu'un seul type d'exercice, je n'aurais certainement pas eu autant de réussite de la part des élèves. Le fait de diversifier les entrées d’un problème permet à chaque élève de trouver une entrée qui le conviendra, puis d’utiliser l’exercice compris afin de réaliser d’autres tâches.

Sur les images ci-dessus, les élèves qui ont eu de la facilité à découper les sections du cube en polystyrène sont ceux qui tiennent les arêtes du cube géant. Alors que les élèves qui montrent les cubes en polystyrènes, pour justifier que la ficelle dans le cube géant est bien positionnée, sont des élèves qui ont plus de facilité avec cette activité du cube géant qu’avec les découpes de sections. Chaque élève a trouvé une entrée au problème posé et peut faire des liens entre les différents exercices en observant les autres camarades et leur autre manière de fonctionner.

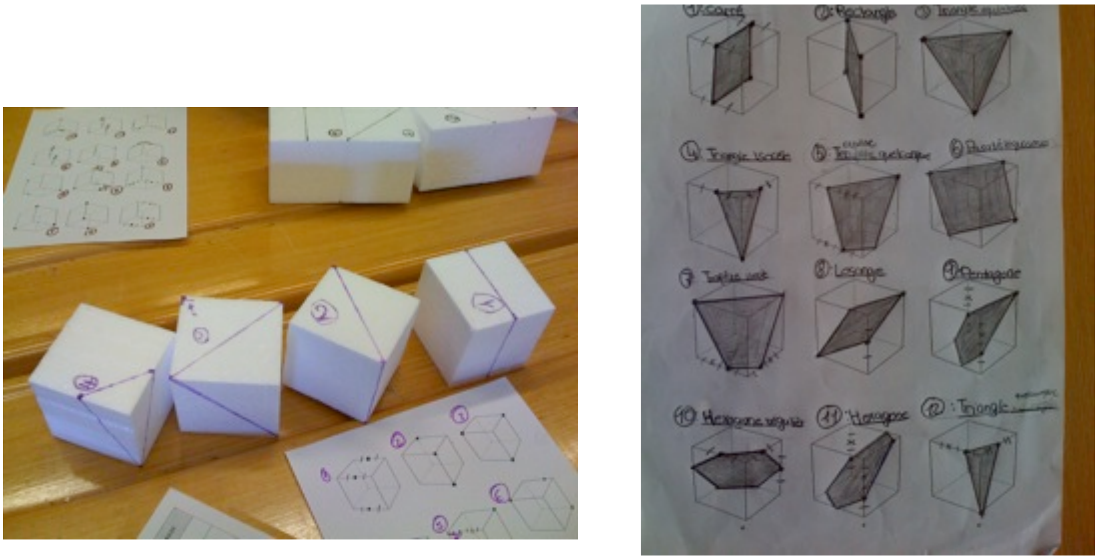


***Figure VII** – Travaux d’élèves basé sur leur intuition*

L’analyse suivant porte plutôt sur l’intuition que les élèves peuvent avoir et utilisent pour résoudre des problèmes. Sur la première image ci-dessus, on voit un travail d’un élève que j’ai retrouvé chez tous les élèves. Les élèves devaient reporter trois points sur chaque cube en polystyrène afin qu’ils découpent ce cube selon ces trois points. On peut voir sur l’image cette même image, ?? que les trois points demandés ne sont pas reliés. Les élèves ont pris l’initiative intuitivement, sans rien demander de relier, quand cela était possible, les points reportés. Les élèves ont donc senti qu’il serait plus facile de découper les sections en suivant une ligne ou deux plutôt que trois points. Leur intuition, sans aucune recommandation de ma part, m’a surpris et leur a permis de découper les sections avec plus de facilité.

L’exercice de report des points permet aux élèves de passer d’un exercice sur papier en perspective cavalière à la réalité d’un cube dans l’espace. Cet exercice permet ce passage de deux dimensions à trois dimensions. Mais l’intuition des élèves peut leur permettre, dans le cas de problèmes complexes de réussir l’activité en économisant du temps et de l’énergie (Meyers 2012). Sans que je ne demande rien et surtout sans aucune explication pour dessiner les sections du cube dans les perspectives cavalières du cube, un élève a dessiné les sections proprement, comme on peut le voir sur la deuxième image ci-dessus. Cet élève a donc produit un travail supplémentaire sans trop d’effort, rien qu’en suivant ses intuitions. De plus, l’élève a marqué sur chaque section dessinée le nom de la forme que la section donne. Afin d’y parvenir, l’élève a pu se servir de son aide-mémoire pour trouver le nom de toutes les figures. Je vois ici deux éléments importants, en plus de l’intuition de l’élève. La première est le passage de la dimension spatiale vers la dimension deux, l’élève arrive à passer d’un objet réel (le cube en polystyrène découpé) à sa représentation sur une feuille. Ces deux passages (deux dimensions <=> trois dimensions) sont importants et doivent exister pour les élèves afin qu'il existe une dialectique entre les différentes dimensions en géométrie, cela peut favoriser l'intuition de certains élèves.

La seconde dialectique que je vois ici est celle qui existe entre l'expérimentation et la théorie. L'élève qui arrive à reconnaître les douze formes, avec ou sans l'aide de l'aide-mémoire, est donc capable de se les représenter mentalement avec leurs propriétés. Sur le deuxième dessin de l'élève (deuxième image ci-dessus), il n'est pas facile d'y reconnaître un rectangle. L'élève qui note sur cette image que la section est un rectangle a su se représenter la forme et n'a pas besoin de la dessiner avec des angles droits car l'élève a fait ce passage de la dimension expérimentale vers la dimension théorique de la forme. La forme et ses propriétés sont donc bien présentes dans la tête de l'élève. L'élève peut vivre la forme et est plus susceptible de faire des liens avec la théorie des propriétés des quadrilatères et triangles.

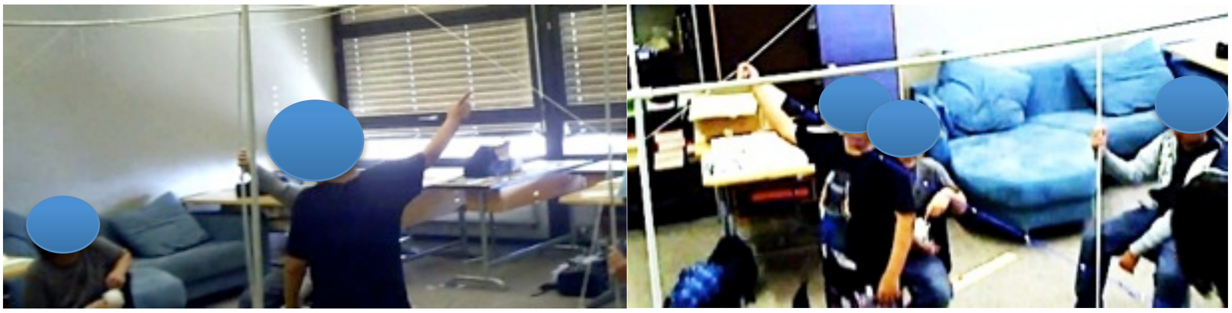


***Figure VIII** – Photos d'élèves transposant la théorie à un autre exercice*

J'ai pu remarquer que la dialectique expérimentation-théorie est à nouveau présente lors de l'activité du cube géant, dans ce cas lors de la reconstitution de l'hexagone régulier avec de la ficelle. Une fois l'hexagone terminé, les élèves m'ont justement montré les côtés parallèles de l'hexagone régulier (première image ci-dessus) puis ajouté, à l'aide de pailles assemblées, tous les axes de symétrie de cet hexagone. Avant de faire cette activité du cube géant, j'avais institutionnalisé les propriétés des triangles et quadrilatères uniquement. Nous n'avions pas vu les propriétés des formes à plus de quatre côtés étant donné que ce n'est pas au programme du PEV. Les élèves ont appliqué et mis en lien la théorie sur les propriétés des triangles et quadrilatères à l'hexagone. Ils ont même réussi à montrer les propriétés dans un hexagone inscrit dans un cube de deux mètres d'arête, alors que la théorie se trouve dans leur cahier, donc en deux dimensions. Il y a donc deux passages que les élèves ont franchis, celui de la dialectique entre expérimentation et théorie et celui des différents supports utilisés pour passer de la feuille de papier à la réalité.

7. Analyse des narrations

Les élèves ont produit leur narration de recherche en écrivant, relatant ce qu'ils avaient fait en classe. Pour y arriver, les jeunes ont dû faire une présentation sur le logiciel Keynote. Ils avaient aussi à disposition les diverses photos prises durant toute la séquence, ils pouvaient également aller chercher des images ou informations sur internet. Chacun des huit élèves a produit une narration avec les éléments mentionnés ci-dessus. Pour analyser les narrations des élèves, j'ai dénombré les images différentes utilisées dans leur présentation. Je les ai ensuite classées en fonction des cinq étapes de l'expérimentation 2, j'ai dû ajouter la catégorie théorie, car certains élèves ont ajouté des images de la théorie produite en classe.

Analyse narrations	Al	And	Ant	D	L	O	S	T	Total
Nb. images dans la narration	11	13	6	12	11	9	11	7	80
1. Découpe cubes polyst.	1	1	1	1	3	1	1	1	10
2. Sections cube polyst.	2	4	1	3	2	2	3	1	18
3. Cubes à partir d'arêtes	3	1	1	1	2	1	0	1	10
4. Forme finale polyst.	1	2	1	2	1	2	2	2	13
5. Forme finale papier	3	5	2	4	3	2	5	2	26
Théorie	1	0	0	1	0	1	0	0	3

***Figure IX** – Tableau des narrations de recherche*

Al, And, Ant, D, L, O, S et T sont les huit élèves qui ont produit les narrations de recherche

On peut constater que les élèves ont retenu les cinq étapes de la construction de ma séquence.

Tous les élèves, à l'exception de S. qui ne mentionne pas l'étape des cubes formés par leurs arêtes, ont gardé en mémoire les cinq expériences. Je notais dans les chapitres précédents l'importance pour ces élèves du spécialisé de pouvoir utiliser leur intuition dans la résolution de problèmes. Or, l'intuition est générée grâce aux diverses expériences, il était donc indispensable de faire vivre aux élèves ces expériences. Mon premier constat est donc positif, en remarquant que presque tous les élèves ont retenu les cinq étapes, chaque élève a pu accumuler un certain nombre d'expériences en mathématique, qui, je l'espère, leurs seront utiles pour leur futures expériences mathématiques.

Ces cinq étapes de ma séquence sont presque équivalentes, on constate toutefois une légère accentuation pour les deux étapes des sections des cubes en polystyrènes ainsi que pour la forme finale en papier. Ces deux étapes ont plus marqué les élèves, cela est peut-être dû au fait que ce sont les deux étapes qui ont pris le plus de temps et de concentration de la part des élèves. Ces deux étapes sont également, à mon avis, les plus complexes, ce qui a certainement mis les élèves plus en difficulté. Pour réussir ces étapes, les élèves ont dû faire plus d'effort que pour les autres étapes ce qui pourrait expliquer ce pourcentage supérieur d'images relatées par les élèves dans leur narration.

Il est intéressant de noter que trois élèves signalent dans leur narration l'étape théorique, certes ce n'est pas une majorité, mais quelques élèves ont intégré la partie théorique dans leur narration, cela peut montrer que des liens ses sont faits entre les expériences et la théorie, que la dialectique (Dias 2008) entre ces deux pôles a été perçue pour ces élèves.

Sur les huitante images des narrations, seulement deux (de deux élèves différents) ont des images insérées, cherchées sur internet. Pour narrer leurs expériences, les élèves n'ont donc pas eu besoin d'aller chercher d'autres images, ils ont utilisé pour la grande majorité de leur présentation leurs photos. Ce fait montre que les expériences proposées ont marqué les élèves. Avec ces expériences, l'élève n'a pas ressenti le besoin d'aller chercher des images, des informations ailleurs que dans ses productions. Ces expériences ont donc bien marqué les élèves, ce qui leur sera profitable pour leurs intuitions futures.

La première image insérée est un hypercube :

Figure IX *– Insertion d'un hypercube dans une narration*

D'après mon interprétation, simplement décorative. L'élève a certainement voulu illustrer son titre (cube) avec une image et est tombé sur cette image.

La deuxième image insérée est plus interrogative. L'élève a mis en parallèle les sections du cube dessinées sur une feuille de papier et une image de différents solides :

Figure IX *– Insertion d'une image de solide dans une narration*

L'élève met donc en l'un en face de l'autre des formes planes avec des solides. Il met l'image des solides pour, peut-être, illustrer les quadrilatères et triangles cités juste avant. Il y a, à mon avis, dans la tête de cet élève une confusion entre le spatiale et la géométrie plane. Le fait de travailler sur des cubes, pour trouver les différents quadrilatères et triangles a peut-être perturbé l'élève, il n'a pas fait les liens entre les deux géométries, plane et spatiale.

Pour continuer l'analyse de certaines pages des narrations, je vais différencier trois types de représentation : l'icône, le symbole et l'indice (Dias 2012). L'icône est une forme de représentation imagée (Ibid.) qui se rapporte fidèlement à la réalité observervée. Le symbole est une représentation moins proche d'une réalité (Ibid.) qu'un icône, le symbole est mis en place pour gagner du temps, pour mettre en place un consensus entre plusieurs personnes pour parler d'un même objet (ex. : le vocabulaire, les francophones symbolisent une chaise avec une suite de lettre c/h/a/i/s/e). L'indice est une représentation indirecte, qui suggère (Ibid.) un objet.

Un autre élève a produit une majorité de pages comme celle-ci :

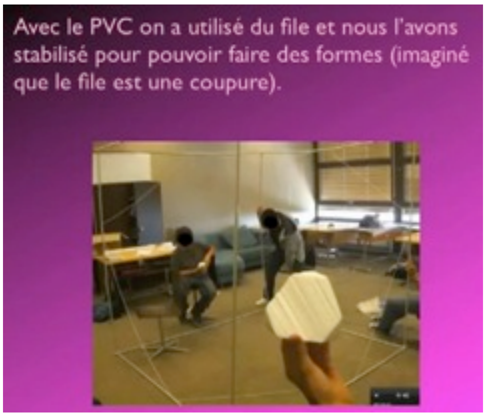


Figure IX *– Exemple d'une image de la narration de Al.*

La représentation ne se fait qu'à travers une icône (la photo), l'élève ne met pas de symbole (vocabulaire) précis pour expliciter. L'élève qui produit un tel travail peut avoir compris le problème, mais n'arrive pas à l'exprimer avec des mots. L'icône est donc utile pour représenter ce que l'élève veut montrer.

Dans toutes les narrations, on trouve dans la majorité des cas une icône (image ou photo) en relation avec un symbole (l'écriture du nom) , en voici deux exemples :

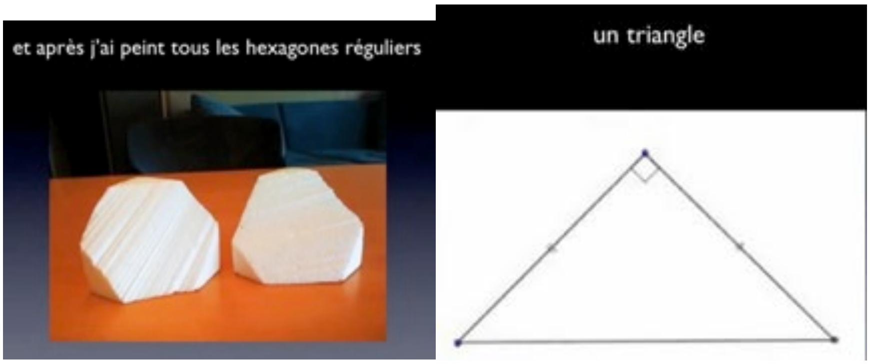


Figure IX *– Icône et symbole représentés sur une m^me page de narration*

Dans ces cas, l'élève utilise correctement le vocabulaire francophone spécifique aux formes géométriques. Il y ajoute une représentation icônique, le fait de mettre en parallèle une icône et un symbole peut aider l'élève à stabiliser son vocabulaire spécifique à la géométrie. Toutes les images de la narration sur le kaléidocycle montrent cette double représentation, icônique et symbolique en même temps.

Dans toutes les narrations, je n'ai pas pu observer de représentation sous forme d'indice. Etant la forme la plus éloignée de la représentation concrète d'un objet, l'indice n'est pas la forme choisie par les élèves. Ils privilègient les représentations se rapprochant au mieux du réel, l'icône. Souvent, ils y ajoutent des mots scientifiques précis, des symboles.

8. Conclusion

Les élèves en difficulté sont capables de faire des activités complexes non-simplifiées. Ces jeunes utilisent leurs intuitions et ont besoin de matériel pour se représenter des objets géométriques en trois dimensions et réussir ces activités. Ils peuvent produire de bons travaux malgré les difficultés des activités. J'ai pu observé qu'ils réussissent à faire des liens entre théorie et expériences (Dias 2008) ainsi qu'entre les différents exercices (Serment 2012).

REFERENCES

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Bkouche, R. (2006) La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In Kourkoulos M., Troulis G., Tzanakis C. (Eds.) *Proceedings of the 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*. (vol.II, art.2.3). Université de Crète.

Bonafé F. (2003) *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Paris: APMEP.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l'Université de Crète.* Rethymon.

Changeux J., Connes A. (1989) *Matière à pensée*. Paris: Odile Jacob.

Chevalier A. (1992) Narration de recherche: un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x* 33, 71–79.

Conne F. (2011) La narration est un relai, une auberge ...espagnole bien entendu. *Actes des journées de la Chaux-d'Abel 2011*.

Dias T. (2008) *La dimension expérimentale des mathématiques: un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Doctorat de l'université Claude Bernard – Lyon 1.

Dias T. (2008) L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire: une didactique entre objets sensibles et objets théoriqus. In Bloch I., Conne F. (Eds) Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques – La géométrie, les documents pour l'enseignement, le métier de chercheur en didactique – Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques Sainte Livrade (Lot et Garonne), 2007 (cédérom d'accompagnement). Grenoble : La pensée Sauvage.

Gonseth F. (1945) *La géométrie et le problème de l'espace*. Neuchâtel: Editions du Griffon.

Greenwood T. (1926) L'adaptation de la géométrie au monde sensible. *Revue néo-scolastique de philosophie* 9, 37–51.

Kant E. (1980) *Critique de la raison pure*. Paris : Gallimard – Folio essais (première édition originale 1781).

Poincaré H. (1968) *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion (première édition originale 1902).

Serment J. (2012) Sections du cube... en version géante. *Math-Ecole* 218, 35–39.