REPRÉSENTER UN POLYÈDRE : D'UN REGISTRE À UN AUTRE EN GÉOMETRIE DANS L'ESPACE

Jimmy SERMENT
Formateur à l'UER Mathématiques et Sciences de la nature
Enseignant spécialisé, Etablissement primaire de Pully, Paudex et Belmont
jimmy.serment@hepl.ch

Thierry DIAS
Professeur, Haute École Pédagogique Vaud
UER Mathématiques et Sciences de la nature
thierry.dias@hepl.ch

Résumé
Cet atelier propose de mener une investigation didactique et sémiotique concernant la notion de conversion de registres de représentation (Duval, 1993). Il s'agit d'étudier puis de comparer les potentialités de deux milieux matériels susceptibles de construire le concept de polyèdre. Le premier environnement est informatique grâce à l'utilisation du logiciel GeoGebra (3D). Le deuxième est celui du monde réel dans lequel seront élaborées des constructions de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Dias, 2015 ; Dias & Serment, 2017). Après un temps de prise en main des deux environnements dans une tâche d'application, les participants doivent explorer ces deux registres dans le cadre de la résolution d'un problème ouvert.

L'objectif de l'atelier est de faire vivre aux participants une situation qui demande de travailler sur deux registres sémiotiques distincts. Ce texte reprend le déroulement des activités, les travaux des participants ainsi que la base théorique sur laquelle se repose notre étude :

I - REGISTRES DE REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES

Pour avoir une base théorique commune et analyser le travail proposé pendant l'atelier, nous avons choisi de nous référer aux travaux de Duval (2005, 2011) concernant les registres de représentation sémiotique, et sur la notion de conceptualisation (D'Amore, 2001). Nous avons également cherché à mettre notre atelier en relation directe avec les recommandations officielles de l'Education Nationale sur la notion de représentation en tant que telle (Eduscol, 2016).

Les travaux de Duval (2005, 2011) sur les registres de représentation permettent une analyse sémiotique d'une situation didactique en mathématiques, toutefois nous n'avons pas trouvé dans ces textes d'exemples concernant la géométrie dans l'espace correspondant à l'environnement matériel spécifique que nous utilisons, à savoir des connecteurs (pour les sommets des solides), des baguettes de 1 mètre de longueur (pour les arêtes des polyèdres) et de la laine (pour montrer des inscriptions ou des sections) (Dias & Serment, 2016). Nous souhaitons donc ici tenter de transposer cette méthode d'analyse mobilisant des registres de représentation à notre atelier dont l'enjeu notionnel principal est celui de la notion de polyèdre. La notion de polyèdre étant trop vaste à explorer dans son ensemble, notre étude sera donc limitée aux solides de Platon du fait de leur consistance didactique et épistémologique (Dias, 2014).

1 Signe, système sémiotique, registre et conceptualisation

Afin de parler de registre en suivant Duval (2005, 2011), nous devons définir un système sémiotique notamment en parlant d'abord des signes qui le constituent.

Un signe est un élément unitaire d'un système sémiotique donné, ce qui, dans notre cas peut être assigné aux baguettes, aux connecteurs et aux morceaux de laine que nous mettons à disposition des apprenants dans notre milieu matériel. Ce sont les signes unitaires du système de représentation que nous nommerons « concret » du fait de son rapport direct au monde sensible qui nous entoure. Ces signes ne peuvent cependant pas exister s'ils ne se rapportent pas à un système sémiotique. Selon Duval (2005, 2011), un système sémiotique est constitué :

1. de règles organisatrices pour combiner ou regrouper des éléments en unités significatives ;
2. de règles organisatrices permettant de désigner les objets.

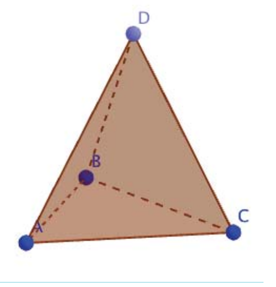
La combinaison des connecteurs et des baguettes permet de représenter des relations géométriques entre des sommets et des arêtes selon des règles organisatrices : on associe par exemple toujours 2 connecteurs à chaque baguette lorsque l'on veut construire un polyèdre. Il existe également d'autres règles qui permettent de désigner les objets construits : on assemble par exemple 8 connecteurs spécifiques, constitué de 3 entrées toutes perpendiculaires les unes des autres, et 12 baguettes pour former un polyèdre que l'on dénomme « cube ». L'objet « cube » étant représenté et désigné, l'environnement constitue donc un système sémiotique.

Toujours en se référant à Duval, on appelle *registre* un système de représentation sémiotique qui permet des opérations internes de représentation. Afin d'assimiler notre environnement matériel à un registre, nous devons donc nous assurer de son potentiel à assurer de telles opérations internes, nous le vérifierons dans la partie expérimentale de l'atelier.

Concernant le logiciel GeoGebra, dans la section géométrie 3D on trouve plusieurs fenêtres : une algébrique, une autre représentant des objets 3D en perspective dynamique, et une dernière permettant de saisir des lignes de codes. Nous avons fait essentiellement utiliser la fenêtre de représentation des objets 3D comme registre. Les signes unitaires sont les boutons pour agir sur l'écran de représentation :

Signes unitaires du système de représentation de GeoGebra 3D

Il existe des règles d'organisation à respecter pour utiliser ces signes unitaires. Par exemple, on ne peut pas créer de plan sans avoir défini *a priori* trois points. Ces règles organisatrices permettent de créer des objets mathématiques, que l'on peut orienter pour changer de point de vue, et que l'on peut également sectionner :

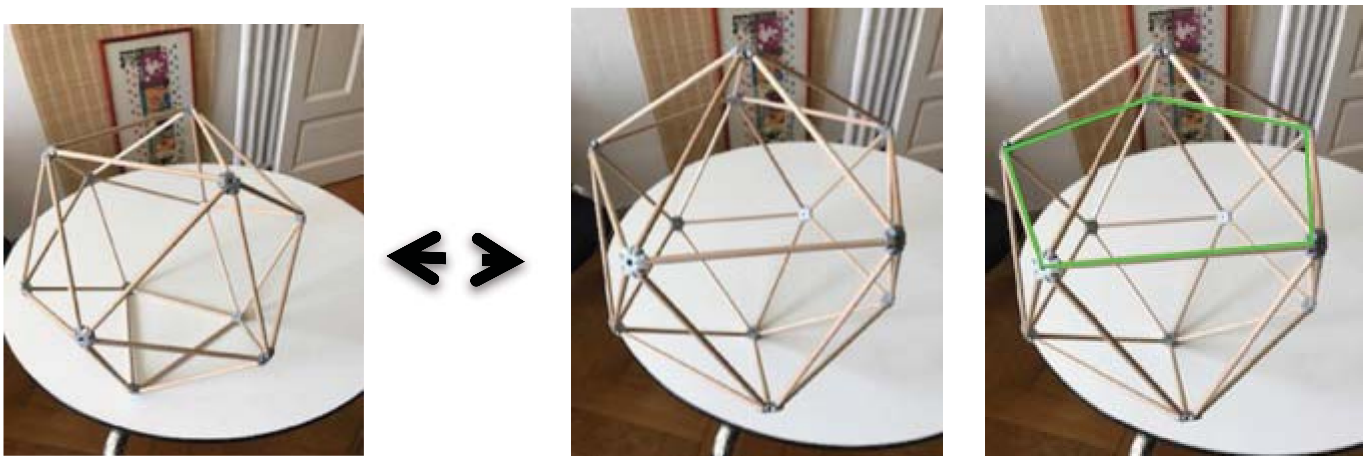


Une pyramide représentée grâce au registre informatisé, GeoGebra 3D

De même, en suivant D'Amore (2001), pour construire des concepts mathématiques, trois « actions » sont nécessaires. La première est de réussir à se représenter le concept dans un registre. La deuxième « action » consiste à traiter ces représentations à l'intérieur de ce même registre. La troisième et dernière « action » est la conversion des représentations d'un registre donné à un autre registre (au moins). La conceptualisation demande donc de traiter un objet dans plusieurs registres différents et si possible de faire des allers-retours entre ces registres (deux au moins).

2 Transformation d'une représentation par traitement interne

La première des transformations possibles est un traitement interne des informations. Il n'y a qu'un seul registre dans ce cas, et les mêmes signes sont utilisés avant et après la transformation. Ce traitement interne est un passage obligatoire pour réussir à conceptualiser mais il n'est cependant pas suffisant. Dans notre situation, si on utilise seulement les signes unitaires que sont les connecteurs, les baguettes et les morceaux de laine, il ne sera donc question que de traitement interne. On peut citer par exemple la notion de point de vue dans ce cas de traitement interne. Ainsi en présentant une construction de l'icosaèdre sur une face ou sur un sommet par rapport à la table, on engage un changement de représentation sémiotique :



Transformation interne d'un icosaèdre, posé sur une face ou sur un sommet.

Ce traitement interne permet d'observer la représentation différemment, il est par exemple plus facile d'observer des sections pentagonales en utilisant la représentation de l'icosaèdre posé sur un sommet, car les plans de section sont parallèles à un plan horizontal (celui de la table), mais, ce faisant, on reste bien dans le même registre.

Cependant, en restant dans ce registre uniquement, des difficultés risquent de survenir (Duval 1993, 2011 ; D'Amore, 2001) :

1. L'apprenant risque de confondre l'objet mathématique avec une représentation sémiotique qu'il pourrait croire unique. Le concept mathématique (vrai au sens théorique seulement) pourrait être confondu avec l'objet existant concrètement (réalisé avec les signes présents dans le milieu matériel).
2. Un autre risque est de maintenir chez les élèves un fossé cognitif infranchissable entre les connaissances géométriques et les situations réelles dans lesquelles ils seront appelés à les appliquer. La conséquence pourrait être de ne pas réussir à conceptualiser, de ne pas construire de connaissance.
3. En restant dans un seul registre, il y aura cloisonnement des connaissances dans un contexte précis et la mobilisation ou le réinvestissement de ces connaissances dans un autre contexte sera difficile. L'apprenant peut ne pas s'investir dans les apprentissages avec un seul registre, ce qui privilégiera un apprentissage par cœur plus automatisé. Il ne sera pas non plus suffisamment acteur dans ses apprentissages si on ne lui permet pas de faire des liens avec d'autres registres. Sans mise en liens entre les connaissances géométriques et spatiales il existe un risque réel de mise en échec scolaire (D'Amore, 2001).

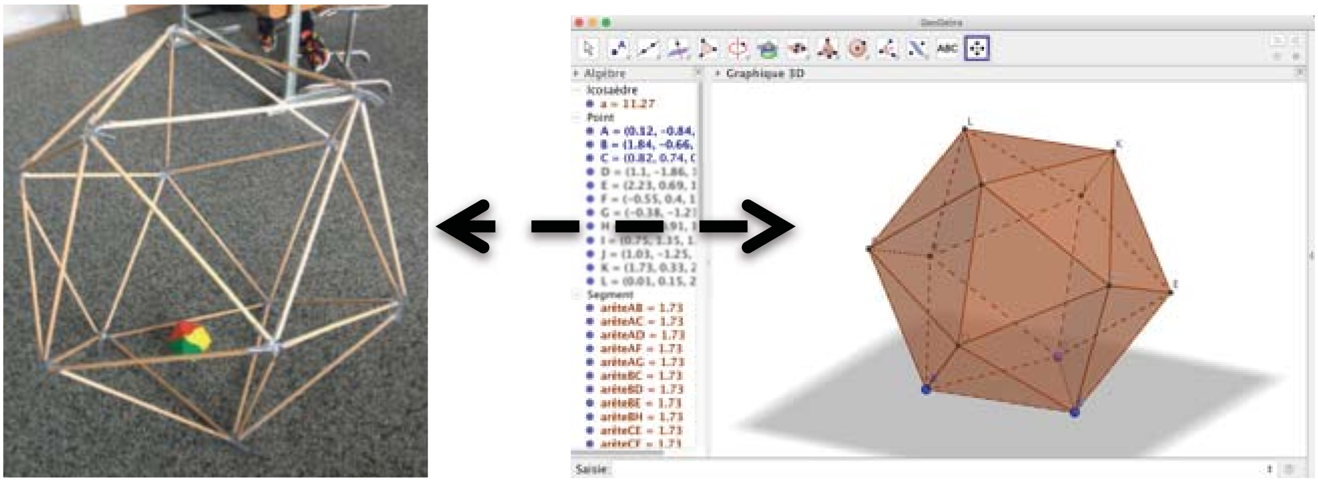
3 Transformation d'une représentation par conversion

Dans les activités que nous avons proposées, le passage d'un registre à un autre peut se faire dans les deux sens : du concret à la représentation sur GeoGebra 3D et vice versa. Pour ce faire, les participants ont dû trouver toutes les sections régulières sur les solides de Platon (voir partie II). Cependant, lors de l'atelier, nous avons observé que ces passages se sont produits à des fins différentes. Le passage du concret vers la représentation sur GeoGebra 3D permet une certaine vérification, alors que l'inverse est plutôt une aide à la construction. Nous avons remarqué le besoin des participants de produire d'abord les sections dans le registre du concret, même s'ils les trouvent *a priori* avec GeoGebra 3D. L'outil informatique permet de créer par exemple la section carrée du dodécaèdre régulier en reliant 4 points précis dans la fenêtre GeoGebra 3D. La vue proposée par le logiciel est une représentation en perspective, et même si on peut orienter et faire tourner l'objet, le carré trouvé ne « ressemble » pas à un signifiant du carré en géométrie plane (visuellement, il n'est pas carré du fait des effets de perspective). Il y a toujours l'envie de matérialiser l'abstrait, comme pour se convaincre de la réalité de l'existence de l'objet obtenu grâce à l'outil informatique : « On fait dans le méso, et on vérifie sur l'ordinateur… parfois ça peut être une aide à la construction, la vision sur GeoGebra peut aider ensuite à la construction réelle et des fois la construction réelle vient aider pour construire en numérique » (extrait d'un enregistrement audio).

Pour pallier aux trois risques d'un traitement de l'information uniquement dans un seul registre, il faut privilégier la conversion des informations dans au moins un autre registre. Dans notre cas, on permet aux apprenants de faire des allers et retours entre le registre du concret et un registre médiatisé par au moins un outil informatique. En effet, Certains participants ont utilisé la fenêtre de code ou la fenêtre algébrique, qui sont deux autres registres proposés par GeoGebra 3D, mais que nous ne détaillerons pas dans ce texte. Les participants ont travaillé en commun sur les activités proposées et ont utilisé le langage oral et la gestuelle pour communiquer entre eux. Ces deux moyens de communication relèvent chacun d'un registre différent supplémentaire. En suivant D'Amore, (2001), la langue naturelle est vue comme un registre complexe car il est multifonctionnel. La langue peut avoir quatre fonctions distinctes :

- Une fonction référentielle de désignation des objets,
- Une fonction apophantique d'expression d'énoncés complets,
- Une fonction d'expansion discursive d'un énoncé complet et
- Une fonction de réflexivité discursive.

Nous n'avons pris en compte que les registres du concret (maquette) et celui de l'informatique dans l'atelier :



Conversion d'un même objet entre deux registres différents

Selon Duval (2011), le passage d'un registre à un autre a plusieurs avantages :

1. Il permet à l'apprenant de prendre conscience des différentes unités de sens possible dans le contenu des représentations. L'élève perçoit les différentes possibilités de représenter un objet mathématique.
2. Ce passage permet la compréhension et la reconnaissance de l'objet mathématique. En effet, en percevant un objet selon deux registres différents, on sollicite la diversité des points de vue sur un même objet ce qui participe de sa compréhension en tant que représentant d'une classe mathématiquement définie. Le registre informatisé représente les objets mathématiques en perspective. On peut faire orienter et faire tourner l'objet pour optimiser la vision que l'on en a, (par exemple pour observer une section dans un polyèdre), mais la vue reste en perspective, en deux dimensions, et n'est jamais exactement une représentation de géométrie plane. Par conséquent, il n'est pas évident d'être convaincu visuellement de l'existence, par exemple, d'une section ennéagonale régulière dans l'icosaèdre régulier.

   Le registre du concret permet une vision tout autre, on peut non seulement tourner le matériel à notre guise pour changer de point de vue, mais on peut aussi entrer dans la forme ou tourner autour d'elle pour en avoir d'autres vues. La vue de l'objet n'est plus en perspective, mais en trois dimensions. Les deux registres sont donc complémentaires quant au point de vue sur l'objet.

   L'élève ose prendre des initiatives sur les savoirs, ose faire des liens en voyant qu'il n'y a pas qu'une seule façon de représenter un objet : il devient actif envers le savoir. Duval (2011) donne comme exemple : « C'est en sens que nous avons fait travailler sur le raisonnement déductif en géométrie fait dans la langue naturelle, la conversion se faisant ensuite des représentations auxiliaires vers la formulation en langue naturelle ». La reformulation dans la « langue naturelle » se fait plus aisément. Quand l'élève a pu travailler sur plusieurs registres, il osera prendre le registre de la langue pour expliquer son raisonnement.

4 La notion de représentation

Dans ses documents institutionnels, le MEN définit une série de six compétences fondamentales en mathématiques, dont l'une d'elles est « représenter »[1].

> « Il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un

[1] http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html#lien1

> mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc. » (Eduscol, 2016, p. 1)

Dans ce document, on recommande aux enseignants de travailler en géométrie en utilisant différents registres pour représenter les objets géométriques. Plusieurs exemples sont proposés dans des domaines différents des mathématiques, tous sont axés sur cette notion de changement de registre. Même si les pistes didactiques proposées concernent le cycle 4, elles sont, selon nous, entièrement transposables au cycle 3 moyennant quelques légères adaptations de contenu permettant de respecter les programmes.

L'objectif général de cette documentation institutionnelle est le développement de cette compétence fondamentale « représenter », qui doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans sa vision du réel mais aussi dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Pour cela, il faut permettre aux élèves de faire des allers-retours entre ces deux mondes afin de diversifier les représentations d'un même objet en vue d'une meilleure abstraction. Cette variété de points de vue sur un même objet permet *in fine* de mieux l'appréhender, et d'accéder ainsi à ses propriétés en tant qu'objet mathématique.

II - TÂCHES PROPOSÉES DANS L'ATELIER

L'atelier s'est déroulé en trois temps distincts et selon des dispositifs matériels et sociaux différents.

1 Introduction : collectivement

Nous avons proposé de commencer l'atelier en illustrant deux registres distincts portant sur un exemple particulier : la construction d'un cube adouci. Il s'agit d'un des solides archimédiens, un polyèdre semi-régulier, composé de 6 carrés et de 32 triangles équilatéraux. Le cube adouci est une sorte de cube déformé pour lequel un carré et 4 triangles équilatéraux sont présents à chacun de ses sommets. Nous avons effectué la construction réelle d'un cube adouci avec des baguettes et des connecteurs, et, simultanément, proposé la même construction par l'utilisation de GeoGebra 3D (en vidéo projection collective).

Les différents signes utilisés dans le registre « concret » (ou « maquette ») sont les baguettes et les connecteurs. En respectant les règles organisatrices qui permettent l'assemblage des baguettes et des connecteurs, nous avons construit un objet signifiant : un cube adouci. Nous pouvons donc parler d'un registre de représentation à part entière.

Avec l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique, nous parlerons globalement du registre « informatique ». GeoGebra 5 propose en fait une pluralité de registres en parallèle puisque chaque partie de l'écran propose des systèmes de signes particuliers donc les règles d'utilisation leurs sont propres : fenêtre graphique, fenêtre algèbre, champ de saisie formelle et menu déroulant. Dans la fenêtre graphique, l'objet est représenté en perspective (comme sur l'image de la pyramide plus haut), on peut agir directement sur ces représentations en ajoutant des points, des droites, des plans, etc. On procède donc à des modifications sur l'objet figuré qui peut être assimilé à un signifiant. L'environnement GeoGebra propose également une fenêtre algébrique. Dans cet espace, il est possible de modifier ou de sélectionner des objets en modifiant des valeurs algébriques de l'objet. Cette façon de modifier les représentations géométriques est indirecte, en changeant les valeurs algébriques, la représentation graphique de la fenêtre voisine changera simultanément. On peut considérer un troisième registre dans GeoGebra, celui de la fenêtre de saisie formelle qui permet de créer des objets à partir d'une ligne de scripts.

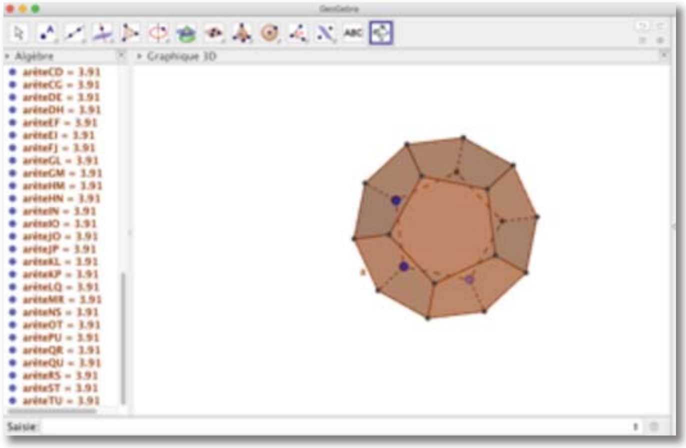


Image de GeoGebra 5, avec les trois registres

Dans l'exemple ci-dessus, on peut remarquer en plus de la fenêtre de représentation en perspective, la fenêtre algébrique et la fenêtre de saisie. Dans la fenêtre algébrique, les signes unitaires sont représentés par des coordonnées pour des points, ou des distances pour des segments, ce sont donc des nombres qui sont les signifiants. Les règles organisatrices sont liées aux formules et aux changements de valeurs des signes unitaires.

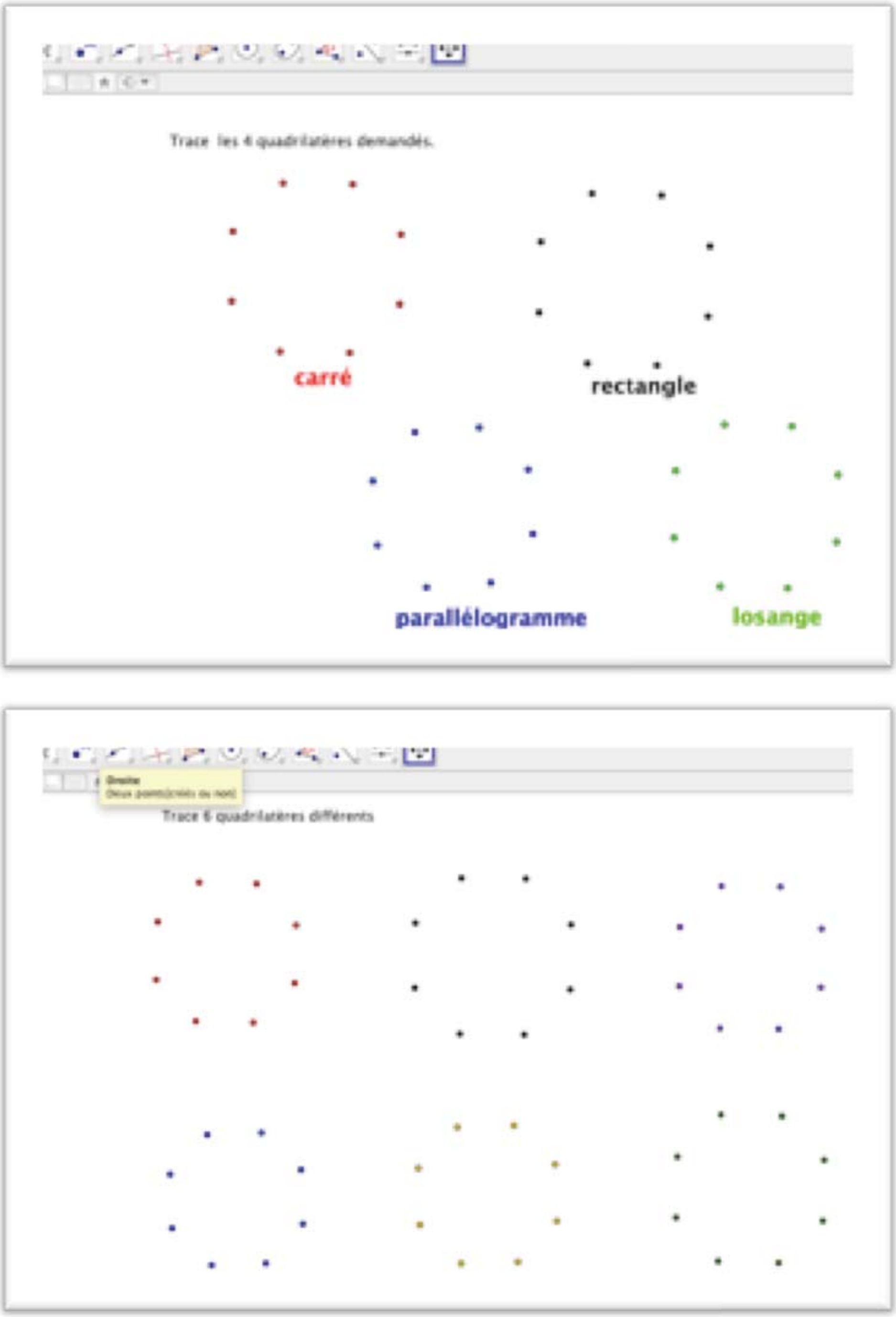
Pour la fenêtre de saisie dont on parlera dans une tâche ci-dessous, les signes unitaires sont les lettres. Les règles organisatrices sont dictées par des scripts précis, par exemple : « Dodécaèdre[A,B] » pour créer un dodécaèdre à partir de deux points.

Nous avons donc ici la présence de 3 registres possibles avec l'utilisation de GeoGebra, une représentation en perspective, une représentation algébrique et une représentation par ligne de code. À noter qu'il y a en permanence en parallèle sur l'écran le registre en perspective et l'algébrique.

L'idée de se premier temps de l'atelier est de montrer ces différents registres et surtout les possibilités de pouvoir passer de l'un à l'autre et d'ainsi convertir des représentations d'un registre à un autre. Présenter un objet avec au moins deux registres différents est important pour la compréhension de l'objet lui-même. La conversion est donc le passage d'un registre à un registre autre pour décrire un objet mathématique.

2 Tâches des participants

Nous avons d'emblée proposé deux activités de découverte de GeoGebra 2D pour les personnes ne connaissant pas ce logiciel. Deux participants ont réalisé ces deux activités consistant à tracer des polygones en reliant les sommets d'un octogone régulier avec des segments :



Travail proposé sur GeoGebra 2D

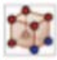
Ces tâches ont été proposées pour prendre en main GeoGebra 2D, et pour se familiariser avec le logiciel. Ces tâches sont similaires, dans le premier cas on impose des quadrilatères à tracer, dans le deuxième cas on demande 6 quadrilatères différents. Ces deux exercices permettent de travailler les propriétés des quadrilatères (parallélisme, perpendicularité, isométrie des côtés), mais pour les participants de l'atelier, l'objectif de ces activités est la prise en main du logiciel. Ils découvrent ainsi ses possibilités et ses contraintes, en créant des polygones grâce aux outils [segment] et [point]. En se familiarisant avec la version 2D de GeoGebra, les participants sont par la suite plus à l'aise avec la version 3D de GeoGebra.

Ensuite, nous avons proposé deux autres activités pour la prise en main de GeoGebra 3D, la première consiste à représenter un cube puis à le sectionner selon un plan. La deuxième activité est axée sur l'écriture d'un script permettant de construire des polyèdres particuliers : les cinq solides de Platon :

1. Construire la section plane d'un solide par un plan variable

Soit ABCDEFGH un cube et I un point de l'arête [EH]. On note P le plan passant par I et parallèle au plan (EBG), et S la section du cube par le plan P. On veut conjecturer la position de I pour que la section soit un hexagone régulier.

Construction



1. **Construire un cube** ABCDEFGH.
2. Placer un point I sur le segment [EH].
3. Sélectionner l'outil  (« Plan passant par trois points ») et créer le plan (EBG).
4. Créer le plan passant par I et parallèle à (EBG) avec l'outil  (« Plan parallèle » dans le menu Plan) en utilisant la fenêtre « algèbre ». *[Note : on peut faire disparaître et apparaître les plans en cliquant sur les points bleus correspondants dans la fenêtre Algèbre].*
5. Cacher le plan (EBG). 
6. Pour une meilleure visualisation, faire apparaître la trace de l'intersection avec l'outil  «intersection de deux surfaces ». Cliquer sur le plan variable passant par I et sur le cube dans la fenêtre « algèbre ».
7. Rendre le cube transparent en modifiant l'opacité de ses faces. Sélectionner le cube dans la fenêtre « algèbre », puis effectuer un clic droit et choisir le menu « propriétés ». Dans l'onglet « couleur », mettre le curseur « opacité » sur 0.
8. Il est également possible de changer la couleur et l'opacité du polygone section toujours dans le menu « propriétés ».

Observation

1. Déplacer le point I et observer la nature de la section du cube par ce plan.
2. Faire varier le point (le logiciel transforme I en M) et conjecturer la position de I pour obtenir une intersection qui soit un hexagone régulier.

Activité sur les sections d'un cube

Dodécaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un dodécaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Icosaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un icosaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Tétraèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un tétraèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Octaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un octaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Cube[<Point A>, <Point B>]
Crée un cube ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Scripts pour les solides de Platon

L'activité des sections du cube est une marche à suivre, montrant toutes les étapes pour construire un cube puis d'en faire les sections. Le cube est utilisé car c'est le solide de Platon le plus familier, les participants ont donc plus de facilité à entrer dans le logiciel 3D en expérimentant sur ce polyèdre. Deux objectifs sont liés à cette tâche, le premier étant la découverte des possibilités de la version 3D de GeoGebra. Le deuxième est lié à la situation problème, cet exercice permet d'exemplifier la situation problème, à savoir trouver toutes les sections régulières dans les solides de Platon. Cet exercice permet d'amorcer la situation problème et les participants peuvent reprendre cette tâche plus tard.

L'activité sur les scripts a pour objectif d'aider les participants à représenter les 5 solides de Platon. En leur donnant les scripts à saisir, les participants ne perdront pas de temps à la construction laborieuse des solides lorsque l'on utilise GeoGebra. L'objectif de la situation problème étant de trouver les sections régulières à l'intérieur de ces solides réguliers, la construction des solides ne doit pas être une entrave à cette tâche.

Une fois ces tâches réalisées ou maîtrisées, nous avons proposé aux participants deux problèmes ouverts, sans indication ni contrainte de dispositif social (seul, binôme ou groupe). Nous avons également laissé libres les participants de naviguer entre le registre du concret et celui de l'informatique selon leurs choix. Le premier problème consiste à « trouver tous les polygones particuliers que l'on peut obtenir par section du cube ». Cette question permet aux participants d'investir plus aisément la situation du fait de la familiarité de ce solide de Platon qu'est le cube. La résolution de cette situation permet de trouver la plupart des polygones convexes à 3, 4, 5 et 6 côtés, sauf le triangle rectangle, le trapèze rectangle et le cerf-volant.

Le deuxième problème est de « trouver tous les polygones réguliers par section des cinq solides de Platon ». À l'aide de la construction des solides de Platon avec les baguettes, les connecteurs et la laine, ainsi que du logiciel GeoGebra 3D, les participants devaient trouver toutes les sections régulières de ces solides particuliers. Cette situation est moins conventionnelle et plus inédite par rapport aux sections du cube. Elle permet de mettre les participants dans une vraie situation de recherche, où personne ne connait les réponses *a priori*. La résolution de cette situation permet de trouver deux sections régulières pour le tétraèdre (triangle équilatéral et carré), deux sections régulières aussi pour l'octaèdre (carré et hexagone régulier), trois sections régulières dans le cube (triangle équilatéral, carré et hexagone régulier), quatre sections régulières pour l'icosaèdre (polygones réguliers à 5, 6, 9 et 10 côtés), cinq sections régulières pour le dodécaèdre (polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 et 10 côtés).

3 Mise en commun

La dernière partie consiste en une mise en commun des remarques des participants à propos des deux problèmes ouverts. Nous avons guidé le questionnement en utilisant chaque fois notre cadrage théorique. Les participants ont narré leurs démarches, leurs expérimentations dans les deux registres proposés et leurs impressions concernant les conversions entre ces registres. Ces remarques ont été enregistrées et quelques extraits choisis sont présentés dans le chapitre suivant.

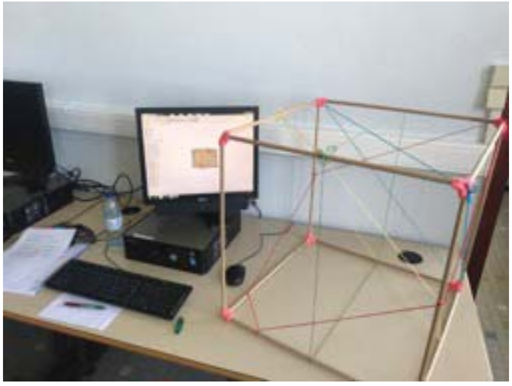
Nous avons proposé pour terminer une correction des deux problèmes ouverts, en montrant sur GeoGebra toutes les sections dans le cube et en montrant toutes les sections régulières dans les 5 solides réguliers.

III - TRAVAUX DES PARTICIPANTS

Dans ce chapitre, nous rapportons nos observations des participants concernant leurs choix de registre, et leurs choix de dispositif de travail durant le déroulement de l'atelier. Pour terminer, nous transcrivons également quelques mots des participants échangés lors de la mise en commun.

1 Nos observations

Nous avons remarqué que les participants ont tous débuté les tâches de l'atelier dans le registre informatique, certainement parce qu'ils venaient de faire des exercices de découverte du logiciel. Cependant, ils ont investi très rapidement le registre concret pour étayer leur questionnement relatif à la construction des objets polyédriques (plus facilement réalisables dans ce registre). Ce changement de registre s'appuyant sur le maniement des baguettes, des connecteurs et de la laine, a poussé les participants à se regrouper en petites équipes de 3, 4 ou 5 personnes. À partir de ce moment, nous avons observé de nombreux allers et retours d'un registre à un autre. Certains groupes ont même apporté leur ordinateur portable à côté des représentations réelles afin de rechercher des équivalences entre les deux registres. Il était probablement question d'une recherche de correspondance entre les deux systèmes sémiotiques de référence : quels signes sont équivalents, quelles règles d'organisation des signes sont différentes, etc.



Passages d'un registre à un autre

En fin de séance, les groupes se sont finalement rassemblés en un seul grand groupe, sans aucune consigne de notre part. Ils ont alors partagé spontanément autour de leurs découvertes et ont conduit des expérimentations communes selon un questionnement partagé :


Regroupement des participants

On peut aussi constater que les participants ont choisi un seul registre de référence pour avoir une discussion commune : le registre concret. Il est en effet probablement plus facile d'organiser une situation de communication dans ce registre qui incite davantage à la réflexion commune (taille des signes et méso-espace (Berthelot & Salin, 1992) de travail). Ce choix est cependant la résultante d'un consensus implicite qui n'a pas fait l'objet d'un débat, ni préalable, ni en cours d'expérimentation. Ce registre utilisant le méso-espace, permet donc de se retrouver physiquement plus facilement autour du même objet ; le registre de représentation en perspective de GeoGebra3D n'étant contrôlé que par une personne : celle qui utilise l'ordinateur. Dans le registre informatique, les autres participants ne peuvent pas agir sur l'objet mathématique directement ce qui limite les possibilités d'interactions et donc de compréhension. De plus, le registre informatique étant plus nouveau pour certains participants, il semble qu'il était également plus adapté pour tous de se retrouver sur le registre concret.

Nous avons pu constater que le choix d'un registre est souvent lié à un type de dispositif social de travail, cela étant dû essentiellement à la taille de l'espace dans lequel se situe chacun des systèmes sémiotiques.

Les artefacts disponibles étant de nature très différentes, baguettes de un mètre versus souris d'ordinateur par exemple, il va de soi que leur manipulation induit des choix de dispositif assez incontournables.

La résolution de la situation problème s'est faîte d'abord par groupe de deux sur l'ordinateur, puis tous les groupes sont passés au registre concret. Ils ont alors pu collaborer et les binômes se sont regroupés, pour finir presque tous ensemble. Les participants n'ont pas eu le temps de trouver toutes les solutions dans la durée impartie de l'atelier. Pour y arriver, il fallait penser à sectionner les solides soit avec des plans orthogonaux à une droite reliant deux sommets opposés ; soit avec des plans parallèles aux faces ; soit avec des plans parallèles aux arêtes. Les participants n'ont pas eu le temps d'essayer toutes ces sections avec tous les solides, ce qui n'était pas le but non plus de notre atelier. L'objectif était en effet de faire prendre conscience de l'importance de la conversion de deux registres.

Pour les sections du cube, un des groupes a proposé un triangle rectangle dans le registre concret, mais n'arrivait pas à le retrouver avec GeoGebra (ce qui est normal, car la section est impossible). Dans le registre du concret, la section semblait avoir un angle droit, et les participants étaient certains qu'il existait. Ne retrouvant pas la section dans le deuxième registre, les participants ont été amenés à réfléchir en schématisant préalablement sur une feuille de papier (ils ont alors constaté que l'angle qu'ils croyaient droit valait en fait moins de 90°). La confrontation des deux registres a permis une réflexion sur un même objet mathématique. Si les participants n'avaient eu que le registre du concret, ils n'auraient sans doute pas douté de l'existence de la section du cube par un triangle rectangle, étant donné que le triangle trouvé était visuellement proche d'avoir un angle droit. A l'inverse, si les participants n'avaient eu que GeoGebra 3D, ils n'auraient pas eu l'occasion de se poser la question de l'existence ou non de la section triangulaire rectangle du cube, puisqu'elle ne serait pas apparue à l'écran.

2 Remarques des participants

Nous constatons que les participants sont entrés très facilement dans la tâche, même pour ceux qui ne sont pas des spécialistes des mathématiques :

> « *Moi je ne suis pas matheuse… au niveau de la motivation, je trouve ça très motivant.* »

Le passage d'un registre à un autre ne se fait pas aisément, par manque d'habitude peut-être, mais aussi parce qu'il est nécessaire pour dépasser des obstacles :

> « *Il faut un déclic pour passer de l'un à l'autre, tu ne vas pas le faire naturellement, tu vas avoir tendance à rester dans un… quand tu as un blocage, tu passes dans l'autre.* »

Comme nous l'avons signalé auparavant, le registre concret est plus vite investi et surtout plus spontanément. En revanche, il a semblé limité notamment pour y investir et y faire fonctionner des connaissances mathématiques qui nécessitent le changement de registre :

> « *Le fait d'être dans l'action avec les baguettes, ça te permet de faire des choses sans mobiliser des connaissances et donc, du coup, quand tu as les connaissances, tu ne les mobilises pas forcément… il faut sortir de la manipulation.* »

Selon les témoignages des participants, les connaissances mobilisées grâce à l'utilisation des registres semblent différentes. Pour eux, dans le registre concret il n'y a pas de connaissances préalables à leurs actions sur les artefacts alors que l'utilisation du logiciel nécessite des connaissances mathématiques et informatiques préalables :

> « *Il y a des choses qu'on arrivait à mieux voir avec l'ordi. Bizarrement, mais parce qu'on arrivait à avoir les connaissances requises qui permettent d'utiliser le logiciel… [parlant du registre concret] ça ne demande pas de connaissances particulières de faire avec la laine.* »

Nous pensons, quant à nous, que des connaissances sont nécessaires dans les deux registres, et même que mathématiquement parlant elles sont très proches. On pourrait penser que le registre du concret ne requiert que peu de connaissances alors que le registre GeoGebra demanderait quant à lui de bonnes connaissances préalables. Le registre concret pourrait être assimilé à des connaissances spatiales, alors que le registre informatisé pourrait être assimilé aux connaissances géométriques (Salin et Berthelot, 1992). Dans les faits, les participants ont utilisé des connaissances géométriques avec le registre du concret, en démontrant des égalités de longueur de segment, en prouvant l'existence d'angles égaux, en justifiant le parallélisme de plans ou de segment ; ils ont fait cette démarche en mobilisant des connaissances théoriques variées (théorèmes de Thales, de Pythagore, trigonométrie entre autres). Ce registre concret a permis de mobiliser des connaissances géométriques, même si au départ, lors des constructions des solides, des connaissances spatiales sont d'abord en jeu. Quant au registre GeoGebra qui paraît très théorique de par sa fenêtre algébrique, il ne l'est pas complétement. Les participants l'ont en effet beaucoup utilisé pour vérifier des équivalences de longueur, ou pour trouver des valeurs d'angles. Ces démarches ne relèvent pas de connaissances géométriques mais spatiales. Au final, ces deux registres ont fait émerger des connaissances mathématiques, qui sont les mêmes dans les deux registres. La différence principale se situe dans la place du langage lors des expériences. Dans le registre concret, les actions sont premières et la mise en mots des connaissances vient dans un second temps soit pour interroger les actes effectués, soit pour faire des choix ou encore pour débattre autour d'un questionnement relatif à la tâche en cours. Dans le registre informatique, il semble que les mots précèdent les actes qui sont moins spontanés du fait de la nouveauté de ce média mais aussi d'une certaine appréhension de la boucle cause-conséquence non maîtrisée face à un environnement logiciel.

À l'issue de cet atelier, nous sommes assez convaincus, à travers notre expérience et les remarques des participants que le registre que nous avons appelé informatique est plus complexe qu'il n'y paraît, et qu'il utilise en fait plusieurs systèmes sémiotiques du fait des différentes fenêtres de travail qu'il propose. En vue d'une transposition de ce type de tâche avec des élèves ou des étudiants, il sera nécessaire de prendre en considération cette complexité comme l'ont bien remarqué les participants :

> « *GeoGebra 3D convoque 3 registres : la fenêtre algèbre et la fenêtre graphique du logiciel, mais aussi le langage oral convoqué lors de l'utilisation.* »

IV - CONCLUSION

Les travaux de Duval (2005) sur les registres de représentations sont ancrés essentiellement dans les domaines du nombre et des opérations. Nous souhaitions, pour notre part, les utiliser dans des tâches concernant la géométrie dans l'espace lors de cet atelier. En proposant des tâches de résolution de problèmes permettant des passages entre deux registres (que nous avons appelés concret et informatique), nous avons confirmé la pertinence, à travers l'analyse des tâches proposées dans l'atelier, de la conversion d'un objet dans deux registres, afin d'en avoir une meilleure compréhension. Les signes et leurs systèmes d'organisation respectifs ont impliqué des dispositifs de travail différents et des finalités complémentaires dans les tâches proposées. *In fine,* nous avons réalisé que le registre se situant dans le cadre de l'utilisation de GeoGebra était plus complexe que prévu du fait de la diversité des environnements de travail qu'il propose dans l'organisation de son écran. Mais ce sont bien les passages des artefacts matériels du registre concret, à ceux du logiciel qui sont la plus grande source de construction des concepts liés aux objets de la géométrie dans l'espace (polyèdre, arête, sommet, plans, etc.).

Nous avons constaté un vif intérêt de tous les participants, dû certainement à la dimension esthétique des objets proposés (les solides de Platon), mais également à la robustesse de la situation didactique. Au-delà du contexte de la formation des enseignants, il nous semble possible d'adapter les tâches pour des élèves en fin de scolarité primaire (par exemple, en ne traitant que les sections du cube, du tétraèdre et de l'octaèdre). L'utilisation des solides peut permettre de travailler les connaissances en géométrie plane, comme les propriétés des triangles et quadrilatères, le parallélisme, la perpendicularité. Dans ce cas, les polyèdres sont considérés comme un médiateur pour permettre à l'élève de travailler des connaissances abstraites que sont les contenus de la géométrie plane. On pourrait aussi mettre en avant les enjeux qui concernent les connaissances sur les solides simples (cube, tétraèdre et octaèdre), en calculant des aires et des volumes. L'utilisation des solides serait alors directement liée aux connaissances à faire émerger. Ce type d'activité nous semblent tout à fait conforme aux indications institutionnelles des programmes dans l'objectif de construire la compétence *représenter* telle qu'elle est décrite dans le document d'Eduscol.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R., SALIN.M. H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I.

D'AMORE B. (2001) Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgique. XXXVIII, 2, 143-168.

DIAS T., SERMENT J. (2017) *Formation à la géométrie dans l'espace par la construction de polyèdres*. Actes du XXXXIII[e] colloque COPIRELEM, Le Puy en Velay.

DIAS T. (2015) Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (65), 151-161.

DUVAL R. (2011) Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Formación en Educación Matemática*, (11), 149-161.

DUVAL R. (2005) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, 67-89, in *Actes du XXXII[e] colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

EDUSCOL. (2016) Compétences travaillées en mathématiques au cycle 4. Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Repéré à : http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html#lien1